

TUTORATO IV
 PROBABILITÀ E STATISTICA
 A.A. 2024/2025

Argomenti: v.a. assolutamente continue; densità congiunte e marginali; indipendenza; calcoli con densità; uso del TCV.

Esercizio 1. Determinare, se esiste, la costante c affinché le funzioni f_1, f_2 e f_3 , definite da

$$f_1(x) = c(1-x^2)\mathbb{1}_{\{x \in (-1,1)\}}, \quad f_2(x) = c(1-x^2)\mathbb{1}_{\{x \in (-2,2)\}}, \quad f_3(x) = c(1-x^2)\mathbb{1}_{\{x \in (2,3)\}},$$

siano densità di probabilità di v.a. assolutamente continue a valori in \mathbb{R} .

Esercizio 2. Fissati $c, \mu \in \mathbb{R}$, sia

$$p(x) = c x^\mu \mathbb{1}_{x \in (0,1)}. \quad (1)$$

- a) Determinare μ affinché p sia integrabile su \mathbb{R} .
- b) Per tali valori di μ , trovare c affinchè p sia una densità di probabilità.
- c) Sia X una v.a. con densità data da (1) con $\mu = 1$ (perché se $\mu = 1$, per un opportuno valore di c , la funzione in (1) è effettivamente una densità). Calcolare la densità della v.a. $X^2 + 1$.

Esercizio 3. Sia X una v.a. continua tale che $\mathbb{P}(X \geq 0) = 1$. Supponiamo che X verifica la proprietà di assenza di memoria:

$$\mathbb{P}(X > x + y \mid X > y) = \mathbb{P}(X > x), \quad \text{per ogni } x, y \geq 0. \quad (2)$$

Abbiamo visto a lezione che se $X \sim \text{Exp}(\lambda)$ allora (2) è soddisfatta. In questo esercizio dimostreremo il viceversa: un v.a. *continua* che soddisfa (2) ha legge esponenziale.

- a) Dimostrare che (2) equivale alla seguente proprietà:

$$\mathbb{P}(X > x + y) = \mathbb{P}(X > x)\mathbb{P}(X > y), \quad \text{per ogni } x, y \geq 0. \quad (3)$$

- b) Dimostrare che se (3) è vera allora:

- b1) per ogni $x_1, x_2, x_3 > 0$ si ha $\mathbb{P}(X > x_1 + x_2 + x_3) = \mathbb{P}(X > x_1)\mathbb{P}(X > x_2)\mathbb{P}(X > x_3)$ e, più in generale,

$$\mathbb{P}(X > x_1 + x_2 + \cdots + x_n) = \mathbb{P}(X > x_1)\mathbb{P}(X > x_2) \cdots \mathbb{P}(X > x_n),$$

per ogni $n \geq 2$ e $x_1, \dots, x_n > 0$;

- b2) per ogni $b \in \mathbb{N}$, con $b \neq 0$, si ha

$$\mathbb{P}(X > 1) = \mathbb{P}(X > 1/b)^b,$$

da cui segue che $\mathbb{P}(X > 1/b) = \mathbb{P}(X > 1)^{1/b}$;

- b3) per ogni $a, b \in \mathbb{N}$, con $b \neq 0$, si ha

$$\mathbb{P}(X > a/b) = \mathbb{P}(X > 1)^{a/b}.$$

b3) per ogni $x \in \mathbb{Q}$ con $x \geq 0$ si ha $\mathbb{P}(X > x) = \mathbb{P}(X > 1)^x$ e che, necessariamente, $\mathbb{P}(X > 1) \in (0, 1)$.

c) Dimostrare che, posto $\lambda = -\ln \mathbb{P}(X > 1)$, si ha

$$\mathbb{P}(X > x) = e^{-\lambda x}, \quad \text{per ogni } x \geq 0.$$

Dedurre che dev'essere $X \sim \text{Exp}(\lambda)$.

Esercizio 4. Una v.a. di Weibull di parametri $\alpha, \lambda > 0$ è una v.a. assolutamente continua T con densità

$$p(t) = \alpha \lambda t^{\alpha-1} e^{-\lambda t^\alpha} \mathbf{1}_{t>0}.$$

- a)** Le v.a. di Weibull vengono utilizzate per descrivere *tempi di vita (aleatori)*, ad esempio di apparecchiature, o di popolazioni biologiche. Giustificare tale interpretazione.
- b)** Fissato $u \in \mathbb{R}$, calcolare esplicitamente $\mathbb{P}(T > u)$ e quindi la funzione di distribuzione $F_T(t) = \mathbb{P}(T \leq t)$, $t \in \mathbb{R}$, di T .
- c)** Fissato $t > 0$, scrivere esplicitamente la funzione $g_t(\cdot)$ definita come

$$[0, +\infty) \ni s \mapsto g_t(s) = \mathbb{P}(T > t + s \mid T > s) = \mathbb{P}(T - s > t \mid T > s) \in [0, 1].$$

Determinare inoltre α e λ affinché la funzione $s \mapsto g_t(s)$ sia monotona o costante.

- d)** Fissato $t > 0$, $\mathbb{P}(T - s > t \mid T > s)$ è la probabilità che l'unità cui T si riferisce rimanga in vita per un ulteriore tempo t noto che all'istante s è funzionante (se è noto che $T > s$, la v.a. $T - s$ viene usualmente interpretata come il *tempo di vita residuo*). Se T denota il tempo di vita (aleatorio) di una certa apparecchiatura, quali valori scegliereste per α e λ se tale apparecchiatura fosse soggetta ad usura? E se T si riferisse a qualcosa che tende a migliorare con l'età? E infine, se T è il tempo di vita di una unità che non tende né a migliorare né a peggiorare con il passare del tempo (o anche: se valesse il concetto di “perdita di memoria”), quali sarebbero i valori più opportuni per α e λ ?

Esercizio 5. Sia $T \sim \text{Exp}(\lambda)$ e sia $\alpha > 0$. Verificare che la v.a. $X = T^{1/\alpha}$ è ben posta e calcolarne la legge. Si tratta di una legge nota?

Esercizio 6. Una v.a. X è detta “di Cauchy” se ha densità (continua)

$$p(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

- a)** Verificare che p è una densità di probabilità e scrivere esplicitamente la funzione di ripartizione.
- b)** Calcolare la legge di $Y = X^2$.
- c)** Dopo aver verificato che la v.a. $Z = 1/X$ è ben posta, calcolare la legge di Z .

Esercizio 7. Siano X_1, \dots, X_n n v.a. indipendenti con densità f_1, \dots, f_n e funzione di distribuzione F_1, \dots, F_n . Calcolare la densità di

$$U = \max(X_1, \dots, X_n) \quad W = \min(X_1, \dots, X_n).$$

Specializzare al caso in cui $f_1 = \dots = f_n = f$ e quindi $F_1 = \dots = F_n = F$.

Esercizio 8. a) Sia X una v.a. con funzione di ripartizione F_X . Si supponga l'esistenza di due numeri reali a, b , con $-\infty \leq a < b \leq +\infty$, tali che:

- i) se $a > -\infty$ allora $F_X(x) = 0$, per ogni $x \leq a$; se $b < +\infty$ allora $F_X(x) = 1$, per ogni $x \geq b$;
- ii) esiste una funzione $G : (0, 1) \rightarrow (a, b)$ tale che

$$F_X \circ G(y) = y, \text{ per ogni } y \in (0, 1) \quad \text{e} \quad G \circ F_X(x) = x, \text{ per ogni } x \in (a, b)$$

(cioè F_X è invertibile su (a, b)).

Sia $Z \sim \text{Un}(0, 1)$ e $Y = G(Z)$. Dimostrare che $F_Y(\xi) = F_X(\xi)$, per ogni $\xi \in \mathbb{R}$. Inoltre, se X ha densità di probabilità f_X dimostrare che anche Y ha densità $f_Y(\xi) = f_X(\xi)$.

- b) Tenendo conto che esistono numerosi (e buoni) generatori aleatori in grado di simulare al calcolatore v.a. uniformi su $(0, 1)$, il risultato in a) può essere usato nella pratica per simulare una v.a. X con funzione di distribuzione F_X che verifica le proprietà i) e ii) (nel caso in cui l'inversa si può scrivere in modo esplicito): come? Ad esempio, se $X \sim \text{Exp}(\lambda)$, come fareste per simulare X ?

Esercizio 9. Sia $X \sim \text{Exp}(\lambda)$. Calcolare la legge di¹ $Y = \lfloor X \rfloor$. Si tratta di una legge nota?
[Sugg.: per $x \geq 0$, $\lfloor x \rfloor \in \mathbb{N}$, quindi Y è una v.a. discreta...]

Esercizio 10. Un componente elettronico ha un tempo di vita S_1 che segue una legge $\text{Exp}(1/10)$. Un secondo componente è composto da due elementi, indipendenti tra loro e con il primo componente, posti in parallelo, con tempi di vita che seguono una legge $\text{Exp}(1/8)$.

- a) Qual è la densità del tempo di vita S_2 del secondo componente?
- b) Qual è la probabilità che il primo componente duri più a lungo del secondo?

Esercizio 11. Sia (X, Y) un vettore aleatorio su \mathbb{R}^2 con densità congiunta

$$f_{X,Y}(x, y) = \frac{c}{1 + x^2 + y^2} \mathbf{1}_D(x, y), \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2,$$

dove $c \in \mathbb{R}$ e D è il disco unitario: $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$.

- a) Calcolare c .
- b) Calcolare le densità marginali. Le v.a. X e Y sono indipendenti?
- c) Fissato $r > 0$, calcolare la probabilità che il punto (X, Y) disti dall'origine per più di r .
- d) Usando c), calcolare la densità di probabilità della distanza di (X, Y) dall'origine.

Esercizio 12. Sia (X, Y) una v.a. in \mathbb{R}^2 con densità continua

$$f_{X,Y}(x, y) = \frac{3}{x^3 y^2} \mathbf{1}_{x>1, y>x}, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

- a) Calcolare $\mathbb{P}(Y < 2X)$.
- b) Calcolare la densità congiunta di $U = \log X$ e $V = X/Y$ e le relative densità marginali.

¹Ricordiamo che per $x \geq 0$, $\lfloor x \rfloor \in \mathbb{N}$ e per $n \in \mathbb{N}$, $\lfloor x \rfloor = n$ se e solo se $x \in [n, n+1)$.