Geometria

Sezione estiva anticipata 20/02/2012

Prof. Franco Ghione e Stefano Trapani

Nome e cognome ....

La prova non sarà considerata sufficiente se non saranno sviluppate correttamente le parti a) di tutti gli esercizi. La parto c) sono facoltative. Motivare le risposte.

Esercizio 1

a) Consideriamo i seguenti vettori di $\mathbf{R}^5$:
$\mathbf{v}_1$=(1,0,1,2,-3), $\mathbf{v}_2$=(-1,1,0,0,-1), $\mathbf{v}_3$=(1,1,2,4,-7), $\mathbf{v}_4$=(0,2,-1,1,0), $\mathbf{v}_5$=(2,-2,0,0,2), $\mathbf{v}_6$=(-1,3,-1,1,-1). Calcolare le dimensioni e basi dei seguenti sottospazi vettoriali di $\mathbf{R}^5$:
V_1=Span($\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$), V_2=Span($\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$), V_3=Span($\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$, $\mathbf{v}_4$), V_4=Span($\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$, $\mathbf{v}_4$, $\mathbf{v}_5$), V_5=Span($\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$, $\mathbf{v}_4$, $\mathbf{v}_5$, $\mathbf{v}_6$).

b) Può esistere una matrice A tale che l'applicazione lineare L_A: $\mathbf{R}^5 \rightarrow \mathbf{R}^5$ abbia V_3 come nucleo e V_4 come immagine? Motivare la risposta.

Esercizio 2

Fissato un sistema di riferimento (O,**i**,**j**,**k**) nello spazio euclideo tridimensionale, si consideri il paraboloide iperbolico ***P*** di equazione z=xy+2, il punto A=(1,0,2) e il piano α di equazione x+y=0.

a) Scrivere in funzione di due parametri liberi *a* e *b* le coordinate di un punto P del piano α e le equazioni parametriche della retta che congiunge A con P.
b) Determinare i punti del piano α per i quali la retta AP è interamente contenuta nel paraboloide.
c) Dimostrare che il paraboloide iperbolico ***P*** non contiene circonferenze.

Esercizio 3

Consideriamo al variare dei numeri reali a e b la seguente matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 1 & 1 & 1 \\ b & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Calcolare, in funzione dei parametri *a* e *b*, il rango della matrice A.
b) Determinare i parametri *a* e *b* affinché la matrice A abbia 0 e -1 come autovalori e in questo caso calcolare i rispettivi autovettori.
c) Nel piano cartesiano di coordinate (*a*,*b*) disegnare il luogo dei punti per i quali la matrice A ha l'autovalore 0 e il luogo dei punti per i quali la matrice A ha -1 come autovalore.