Geometria

Sezione estiva anticipata 28/02/2012

Prof. Franco Ghione e Stefano Trapani

Nome e cognome ....

La prova non sarà considerata sufficiente se non saranno sviluppate correttamente le parti a) di tutti gli esercizi. Le parti c) sono facoltative. Motivare le risposte.

Esercizio 1

a) Consideriamo i seguenti vettori di $\mathbf{R}^4$:
$\mathbf{v}_1=(2,2,-1,-1)$, $\mathbf{v}_2=(1,0,0,1)$, $\mathbf{v}_3=(-3,-3,1,1)$. Calcolare la dimensione di V=Span($\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$) e determinare una base di V formata da vettori che hanno due componenti nulle.

b) Sia $U_1=\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbf{R}^4 : x_1= x_2=0\}$ e $U_2=\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbf{R}^4 : x_3= x_4=0\}$ Dimostrare che $U_1 \oplus U_1 = \mathbf{R}^4$ e calcolare le dimensioni di $U_1 \cap V$ e $U_2 \cap V$ motivando la risposta.

c) Siano $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ due vettori linearmente indipendenti di uno spazio vettoriale V. Dimostrare che i vettori $a\mathbf{v}_1+b\mathbf{v}_2$ e $c\mathbf{v}_1+d\mathbf{v}_2$ sono linearmente indipendenti se e solo se

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0$$

Esercizio 2

Fissato un sistema di riferimento (O,**i**,**j**,**k**) nello spazio euclideo tridimensionale, si considerino le rette r ed s definite dalle equazioni

$$r : \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \qquad s : \begin{cases} y = 2 \\ z = 0 \end{cases}$$

a) Dimostrare che le due rette sono sghembe e trovare le equazioni parametriche della retta che passa per il punto A=(2,1,1) e che interseca r ed s.

b) Determinare l'equazione cartesiana del luogo dei punti dello spazio equidistanti da r ed s.

c) Dimostrare che il luogo dei punti equidistanti da due rette sghembe è un paraboloide iperbolico.

Esercizio 3

Consideriamo al variare del parametro reale a la matrice A:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 0 & a \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

a) Calcolare gli autovalori della matrice A e dimostrare che questi autovalori non dipendono dal parametro a.

b) Calcolare gli autospazi di A al variare del parametro a e dire in quali casi A è diagonalizzabile.

c) Sia B una matrice n×n, C una matrice n×m e D una matrice m×m. Dimostrare, qualunque sia la matrice C, che il polinomio caratteristico della matrice a blocchi A

$$A = \begin{pmatrix} B & C \\ 0 & D \end{pmatrix}$$

è uguale al prodotto del polinomio caratteristico della matrice B e del polinomio caratteristico della matrice D.