

Universita' di Roma Tor Vergata  
Esame di Geometria 1 (Prof. Ghione)  
3 Settembre 2010

Nome e Cognome .....

Giustificare le risposte.

**Esercizio 1**

Dare la definizione di distanza tra due rette.

**Esercizio 2**

Si consideri il sistema di equazioni lineari che ha per matrice completa la

$$A = \begin{pmatrix} 12a & 2 & 2 & b \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \\ 6a & 1 & 1 & c \end{pmatrix}$$

che varia in funzione dei numeri reali a, b e c.

a\*) Dopo aver calcolato il determinante di ognuna delle orlate che la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ammette in A, si determinino gli a, b, c per i quali il sistema e' compatibile.

b\*) Nei casi in cui risulta possibile, calcolare le soluzioni del sistema con la regola di Cramer.

c) Interpretare geometricamente i risultati trovati al punto a) in relazione ai quattro piani che, in un dato riferimento cartesiano dello spazio, corrispondono alle quattro equazioni del sistema.

**Esercizio 3**

Si consideri l'applicazione lineare F di  $\mathbf{R}^2$  in  $\mathbf{R}^3$  definita da

$F(x, y) = (2y, x+y, -x)$  e l'applicazione lineare  $L_A : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^2$  definita dalla matrice

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 1 & t & -2 \end{pmatrix}$$

a)\* Trovare una base per Im F e per Ker  $L_A$ .

b)\* Determinare, se esistono, quei valori di t per i quali  $\text{Im } F = \text{Ker } L_A$ .

c) Data l'applicazione lineare iniettiva  $F : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m$  e l'applicazione lineare suriettiva  $G : \mathbf{R}^m \rightarrow \mathbf{R}^p$  dimostrare che, se  $\text{Im } F = \text{Ker } G$ , allora  $n-m+p=0$

#### Esercizio 4

Fissato nello spazio euclideo un sistema di riferimento  $(O, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$  si consideri il punto  $A=(1,-1,1)$ , il piano  $\alpha$  di equazione  $x+y+z=1$  e la retta  $r$  di equazioni parametriche:

$$\begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = t + 1 \end{cases}$$

a)\* Dimostrare che la retta  $s$  di equazioni  $x=1; y+z=0$

1. Contiene il punto  $A$ .
2. E' contenuta in  $\alpha$ .
3. E sghemba con  $r$ .
4. E' perpendicolare a  $r$ .

b)\* Trovare le coordinate di due punti  $B$  e  $C$  appartenenti alla retta  $r$  in modo che il triangolo  $A,B,C$  risulti equilatero

c) Trovare l'area del triangolo  $ABC$  individuato nel punto b).