Universita' di Roma Tor Vergata
Esame di Geometria 1 (Prof. Ghione)
5 Luglio 2010

Nome e Cognome ....
Giustificare le risposte.

Esercizio 1
Dare la definizione di rango di una matrice.
Esercizio 2
a)* Fissato un sistema di riferimento cartesiano (O,**i**,**j**,**k**) per lo spazio euclideo tridimensionale consideriamo due punti $A=(a_1,a_2,a_3)$ e $B=(b_1,b_2,b_3)$. Determinare le coordinate del punto M appartenete al segmento A B tale che la distanza di M da A è uguale a p volte la distanza di M da B e dimostrare la formula trovata.
b)* Consideriamo le rette r ed s definite dalle equazioni

$$r \quad : \quad \begin{cases} x = 1+t \\ y = t \\ z = 2 \end{cases} \qquad\qquad s \quad : \quad \begin{cases} x+z = 0 \\ x+y-z = 1 \end{cases}$$

Sia A un generico punto della retta r e B il punto di s per il quale il vettore AB è perpendicolare ad r. Determinare, al variare di A, le coordinate del punto M della retta AB tale che la distanza di M da A è uguale a 2 volte la distanza di M da B.
c) Determinare se esiste un piano che contenga gli infiniti punti M calcolati precedentemente.
Esercizio 3
Si considerino le due applicazioni lineari F e G di $\mathbf{R}^4$ in $\mathbf{R}^2$ definite da
$F(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1+ x_2+ x_3+ kx_4, x_1-x_2)$
$G(x_1, x_2, x_3, x_4) = (kx_1+ x_2+ x_3+ x_4, x_3-x_4)$
a)* Calcolare al variare del parametro k, Ker F $\cap$ Ker G
b)* Consideriamo le due fibre

$$S = F^{-1}((1,0)) \quad , \quad T = G^{-1}\left(\left(\frac{k+1}{2},0\right)\right)$$

Calcolare, al variare del parametro k, l'insieme $S \cap T$.
c)Interpretare geometricamente, nello spazio euclideo a 4 dimensioni, i risultati precedenti.
Esercizio 4
Consideriamo le matrici A e B seguenti:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad B = \begin{pmatrix} p & q \\ 1 & p \end{pmatrix}$$

a)* Dire per quali valori di p e q esiste un vettore non nullo X tale che AX=BX.
b)* Fare un esempio numerico di una coppia di valori (p,q) per i quali esiste un vettore non nullo X tale che AX=BX e, in quel caso, determinare tali vettori.
c) Trovare il minimo valore di q per il quale esiste un vettore non nullo X tale che AX=BX.