

Universita' di Roma Tor Vergata
Esame di Geometria 1 (Prof. Ghione)
5 luglio 2011

Nome e Cognome

Giustificare le risposte. Rispondere innanzitutto alle domande contrassegnate da un asterisco.

Esercizio 1 Definire il prodotto scalare di due vettori geometrici.

Esercizio 2

Consideriamo lo spazio vettoriale V formato da tutti i polinomi a coefficienti reali in una indeterminata X di grado minore o uguale a 4.

$$V = \{a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3 + a_4X^4 \mid a_i \in \mathbb{R}\}.$$

a)* Sia k un fissato numero reale e V_k il sottoinsieme di V formato da tutti i polinomi di V divisibili per $X-k$. Dimostrare che V_k è un sottospazio vettoriale di V ed esplicitare una sua base.

b*) Siano V_1 e V_2 i sottospazi dello spazio dei polinomi di grado ≤ 4 divisibili per $X-1$ e per $X-2$ rispettivamente. Calcolare la dimensione e una base di $V_1 \cap V_2$.

c) Dimostrare che ogni polinomio $F(X)$ di grado $\leq n$ si può scrivere come

$$F(X) = (X-1)P(X) + (X-2)Q(X)$$

per opportuni polinomi $P(X)$ e $Q(X)$.

Esercizio 3 Fissato nello spazio euclideo un sistema di riferimento cartesiano $(O, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$,

a)* Calcolare le coordinate del centro della sfera S di equazione $x^2 + y^2 + z^2 = 2x$ e la distanza $D(k)$ di questo punto dal piano α_k di equazione $x+y=k$.

b)* Determinare i valori di k per i quali $S \cap \alpha_k \neq \emptyset$.

c) Dimostrare che il piano di equazione $a(x-x_0) + b(y-y_0) + c(z-z_0) = 0$ interseca una sfera di centro (x_0, y_0, z_0) in un cerchio di raggio massimo.

Esercizio 4 Si consideri la matrice

$$A = \begin{pmatrix} t & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & t^2 \end{pmatrix}$$

dove t è un parametro reale.

a)* Calcolare il rango di A al variare di t , e dire se, per opportuni valori di t , esiste una colonna \mathbf{b} tale che il sistema

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

non ha soluzioni.

b)* Posto $\mathbf{b} = (0, 1, 1)^t$ si calcoli, ove possibile, le soluzioni del sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ con la regola di Cramer.

c) la risposta ad a) cambia se si lavora sul campo dei numeri complessi invece che su quello reale?