Universita' di Roma Tor Vergata
Esame di Geometria 1 (Prof. Ghione)
6 giugno 2011

Nome e Cognome ....

Giustificare le risposte. Rispondere innanzitutto alle domande contrassegnate da un asterisco.

Esercizio 1 Dare la definizione di matrice invertibile e un esempio di matrice non nulla e non invertibile.

Esercizio 2 Siano σ e τ le applicazioni lineari di $\mathbf{R}^4$ in $\mathbf{R}^4$ che permutano le componenti di un vettore nel modo seguente

$$\sigma(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1, x_4, x_3, x_2)$$
$$\tau(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_2, x_3, x_1, x_4)$$

a)* Dimostrare che σ e τ sono applicazioni lineari iniettive e suriettive.

b)* Consideriamo i sottospazi U e V di $\mathbf{R}^4$ dati da

$$U = \{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^4: \sigma(\mathbf{x}) = \mathbf{x}\} \qquad V = \{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^4: \tau(\mathbf{x}) = \mathbf{x}\}$$

Calcolare la dimensione di U e quella di V e dimostrare che ogni vettore di $\mathbf{R}^4$ si scrive come somma di un vettore di U e di uno di V. Questa scrittura è unica?

c) Sia σ una permutazione non banale di n elementi e F_σ l'applicazione lineare di $\mathbf{R}^n$ in $\mathbf{R}^n$ definita da $F_\sigma (x_1, x_2, ... x_n) = (x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, ... x_{\sigma(n)})$. Dimostrare che la dimensione del sottospazio $U= \{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n: F_\sigma (\mathbf{x}) = \mathbf{x}\}$ è uguale al numero dei cicli di σ .

Esercizio 3 Fissato nello spazio euclideo un sistema di riferimento cartesiano (O,**i**,**j**,**k**), consideriamo i quattro punti di coordinate A=(1,0,1), B=(-1,2,1), C=(0,0,1), D=(0,-1,2)

a)* Calcolare le coordinate dei punti E, F, G e H rispettivamente punti medi dei segmenti AB, BC, CD, DA e dimostrare che questi punti sono i vertici di un parallelogramma.

b)* Determinare una equazione cartesiana del piano che contiene il parallelogramma. Dimostrare che non esistono circonferenze che passano per A,B,C,D.

c) Dimostrare che i punti medi dei lati di un qualunque quadrilatero sono vertici di un parallelogramma.

Esercizio 4 Consideriamo i seguenti 5 vettori numerici a tre componenti:
$\mathbf{v}_1$=(2,-1,-1), $\mathbf{v}_2$=(1,0,-1), $\mathbf{v}_3$=(0,0,2), $\mathbf{v}_4$=(1,1,1), $\mathbf{v}_5$=(3,0,-1).

a)* Trovare una combinazione lineare nulla e non banale di questi 5 vettori.

b)* Sia $\mathbf{v}_t$=(t,1-t,2). E' possibile esprimere, per ogni numero intero t, il vettore $\mathbf{v}_t$ come combinazione lineare dei 5 vettori precedenti? E' possibile farlo in modo unico? Scrivere $\mathbf{v}_t$ come combinazione lineare di $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$, $\mathbf{v}_4$, $\mathbf{v}_5$ con tutti i coefficienti della combinazione lineare interi e non nulli.

c) Dati n+1 vettori numerici di $\mathbf{R}^n$ le cui componenti siano numeri interi, dimostrare che esiste sempre una loro combinazione lineare nulla in modo che tutti i coefficienti della combinazione lineare siano ancora numeri interi e non nulli.