Universita' di Roma Tor Vergata
Esame di Geometria 1 (Prof. Ghione)
aa. 2008-09
6 Luglio 2009

Nome e Cognome ....
Giustificare le risposte. Rispondere innanzitutto alle domande contrassegnate da un asterisco.

Esercizio 1
Dare la definizione di matrice ridotta.

Esercizio 2
Consideriamo il seguente sistema di tre equazioni lineari in 4 incognite

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = -t \\ x_3 - x_4 = 2s \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 - 3x_4 = 2t + 2s \end{cases}$$

a*) Determinare i valori dei parametri t ed s per i quali i sistema è compatibile.
b*) Sia A la matrice dei coefficienti del sistema precedente, $L_A : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^3$ l'applicazione lineare associata e **u**=(-1,0,2) , **v**=(0,2,2) due vettori di $\mathbf{R}^3$. Calcolare la dimensione e una base dello spazio Im $L_A \cap$ *Span*(**u,v**).
c) Date due applicazioni lineari iniettive $F : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^p$ e $G : \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^p$, dare una condizione sufficiente affinché dim (Im F ∩ Im G) $\geq$ 1.

Esercizio 3
Dati due punti diversi A e B dello spazio euclideo, chiamiamo *piano di simmetria* del segmento AB il piano passante per il punto medio del segmento AB e perpendicolare ad AB.
Fissato nello spazio euclideo un sistema di riferimento cartesiano (O,**i**,**j**,**k**) consideriamo i tre punti
A=(2,1,0), B=(2,0,2), C=(0,1,2)
a*) Calcolare le equazioni cartesiane dei tre piani di simmetria dei segmenti AB, AC e BC rispettivamente e le equazioni parametriche della retta che hanno in comune.
b*) Calcolare l'equazione cartesiana del piano per A,B,C, il raggio e le coordinate del centro del cerchio passante per A,B,C e spiegare il procedimento seguito.
c) Se $A=(a_1, a_2, a_3)$ e $B=(b_1, b_2, b_3)$ dimostrare che l'equazione cartesiana del piano di simmetria del segmento AB è

$$(x- a_1)^2 + (y- a_2)^2 + (z- a_3)^2 = (x- b_1)^2 + (y- b_2)^2 + (z- b_3)^2$$

Esercizio 4
Consideriamo la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e siano $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3, \mathbf{c}_4, \mathbf{c}_5, \mathbf{c}_6$, le sue 6 colonne e $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3, \mathbf{r}_4$ le sue 4 righe.
a*) Calcolare le dimensioni degli spazi vettoriali dati da

$$U = \{(x_1, x_2, \dots, x_6) \in \mathbf{R}^6 \mid x_1\mathbf{c}_1 + x_2\mathbf{c}_2 + \dots + x_6\mathbf{c}_6 = \mathbf{0}\}$$
$$V = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbf{R}^4 \mid x_1\mathbf{r}_1 + x_2\mathbf{r}_2 + x_3\mathbf{r}_3 + x_4\mathbf{r}_4 = \mathbf{0}\}$$

b*) Calcolare la dimensione del nucleo e dell'immagine di $L_A : \mathbf{R}^6 \to \mathbf{R}^4$.
c) Sia A una qualunque matrice di m righe e n colonne e siano $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \dots, \mathbf{c}_n$, le sue n colonne e $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_m$ le sue m righe $U \subset \mathbf{R}^n$ e $V \subset \mathbf{R}^m$ gli spazi delle relazioni lineari per le colonne e per le righe rispettivamente come nell'esempio precedente. Dimostrare che n - dim U = m - dim V.