Geometria

Sezione estiva anticipata 07/02/2012

Prof. Franco Ghione e Stefano Trapani

Nome Cognome ....

La prova non sarà considerata sufficiente se non saranno sviluppate correttamente le parti a) dei tre esercizi. La parti c) sono facoltative.

Esercizio 1

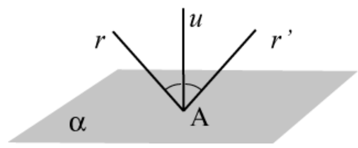
a) Dati i due vettori **u**=(1,1,0,1) e **v**=(0,1,1,0) di $\mathbf{R}^4$, fare un esempio di un vettore **w** di $\mathbf{R}^4$ non nullo per il quale i vettori **u**, **v**, **w** siano linearmente dipendenti e dire, in generale, quale relazione debbono verificare le prime tre componenti di un vettore di $\mathbf{R}^4$ linearmente dipendente da **u**, **v**.

b) Con riferimento ai vettori introdotti nel punto a) trovare un vettore **z** di $\mathbf{R}^4$, ortogonale a **u** e **v** e calcolare la dimensione dello spazio V=Span(**u**,**v**,**z**). Sapendo che il vettore $\mathbf{e}_1$ =(1,0,0,0) non appartiene a V calcolare la dimensione di $V \cap W$ essendo W lo spazio generato dai primi due vettori della base canonica di $\mathbf{R}^4$.

Esercizio 2

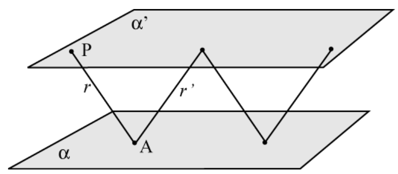
Fissato un sistema di riferimento (O,**i**,**j**,**k**) nello spazio euclideo tridimensionale, consideriamo il piano α di equazione 2x-y-2z=1 e la retta *r* intersezione dei piani x=y e z=2.

a) Calcolare le coordinate del punto A dove *r* interseca α e le equazioni parametriche della retta *u*, passante per A ed ortogonale ad α.



b) Calcolare le equazioni parametriche della retta *r'* passante per A, contenuta nel piano individuato da *r* ed *u* e che forma con *u* lo stesso angolo di *r* (raggio riflesso).

c) Consideriamo il punto P=(1,1,2) della retta *r* e il piano α' passante per P e parallelo ad α. Supponendo che il raggio PA si rifletta più volte sui piani α ed α', dopo quante riflessioni il punto P avrà raggiunto sul piano α' una distanza da P maggiore di 10 ?



Esercizio 3

a) Sia $T: V \to V$ una applicazione lineare, cosa si intende dire quando si dice che una dato vettore **v** è una autovettore con autovalore λ ?

b) Sia $T: V \to V$ una applicazione lineare, con V spazio vettoriale su **R**, supponiamo che T^3=*Id* (cioè supponiamo che la composizione di T con se stesso tre volte produca l'applicazione identità) dimostrare che, se λ è un autovalore di T, allora $\lambda^3 = 1$ e dare un esempio di una situazione come sopra in cui V= $\mathbf{R}^2$ e λ non sia un numero reale.

c) Sia $T: V \to V$ una applicazione lineare, con V spazio vettoriale su **R**, supponiamo che T^2=*Id* (cioè supponiamo che la composizione di T con se stesso due volte produca l'applicazione identità) dimostrare che T è diagonalizzabile. (Suggerimento: osservare che i vettori $\frac{\mathbf{v}+T(\mathbf{v})}{2}$ e $\frac{\mathbf{v}-T(\mathbf{v})}{2}$ se non nulli, sono autovettori di T di autovalore 1 e -1 rispettivamente)