Universita' di Roma Tor Vergata
Esame di Geometria 1 (Prof. Ghione)
aa. 2008-09
8 Giugno 2009

Nome e Cognome ....
Giustificare le risposte. Rispondere innanzitutto alle domande contrassegnate da un asterisco.

Esercizio 1
Dare la definizione di modulo di un vettore numerico a n componenti.

Esercizio 2
Consideriamo gli otto vertici $A_1,A_2, ..., A_8$ di un cubo e sia V il vertice di una piramide che ha come base una faccia del cubo.
a)* Calcolare la dimensione e una base per lo spazio $Span(\mathbf{VA}_1,\mathbf{VA}_2,...,\mathbf{VA}_8)$.
b)* Descrivere la posizione del centro della figura formata dai punti $A_1,A_2, ..., A_8$.
c) Determinare il rapporto tra l'altezza della piramide e quella del cubo nel caso in cui il centro dei 9 punti $A_1,A_2, ..., A_8$,V si trovi sulla base della piramide.

Esercizio 3
Fissato nello spazio euclideo un sistema di riferimento cartesiano $(O,\mathbf{i},\mathbf{j},\mathbf{k})$ consideriamo le rette r ed s definite da

$$r \quad : \quad \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \\ z = t \end{cases} \qquad\qquad s \quad : \quad \begin{cases} y + z = 1 \\ z = 0 \end{cases}$$

e i piani di equazione

$$px+(q-p)y=qz$$

a)* Calcolare, in funzione di p e q, le coordinate dei punti A e B intersezioni dei piani con le rette r ed s rispettivamente.
b)* Calcolare le coordinate del punto medio M di A e B e dimostrare che il luogo descritto da M al variare di p e q è una curva piana.
c) Dare le equazioni della curva descritta da M e dire di che curva si tratta.

Esercizio 4
Nello spazio dei vettori numerici a 6 componenti consideriamo la base canonica $\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,...,\mathbf{e}_6$ e i vettori

$$\mathbf{u}=(1,1,0,0,1,1) \text{ e } \mathbf{v}=(0,0,1,1,0,0).$$

Sia F l'endomorfismo di $\mathbf{R}^6$ definito da

$$F(\mathbf{e}_1) = \mathbf{u}, F(\mathbf{e}_2) = 2\mathbf{u} , F(\mathbf{e}_3) = 3\mathbf{u} , F(\mathbf{e}_6) = \mathbf{v} , F(\mathbf{e}_5) = 2\mathbf{v} , F(\mathbf{e}_4) = 3\mathbf{v}.$$

a*) Calcolare $F(\mathbf{u})$ e $F(\mathbf{v})$ e la matrice associata ad F nelle basi canoniche.
b*) Calcolare la dimensione e una base di $\mathrm{Im}\, F \cap \mathrm{Ker}\, F$.
c) Sia $F : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ un endomorfismo. Dimostrare che

$$\mathrm{Im}\, F + \mathrm{Ker}\, F = \mathbf{R}^n \text{ se e solo se } \mathrm{Ker}\, F = \mathrm{Ker}\, F^2.$$