Universita' di Roma Tor Vergata

Esame di Geometria 1 (Prof. Ghione)

10 Giugno 2008

Nome e Cognome ....

Giustificare le risposte. Rispondere innanzitutto alle domande contrassegnate da un asterisco.

Esercizio 1

Dato uno spazio vettoriale V e un suo sottospazio U, dire in quali condizioni è definito lo spazio ortogonale a U e in quel caso darne la definizione.

Esercizio 2

Consideriamo un quadrato di vertici A_1, A_2, A_3, A_4.

a)* Elencare gli elementi dell'insieme formato da tutti i vettori geometrici $\mathbf{A_iA_j}$, (i=1,2,3,4; j=1,2,3,4) <u>diversi</u> tra loro.

b)* Trovare una base dello spazio generato da tali vettori ed esprimere i vettori che non sono stati inseriti nella base come combinazioni lineari di quelli della base.

c) Sia V un punto sulla retta passante per A_1 perpendicolare al piano del quadrato, e sia h la sua distanza da A_1. Sia $\alpha(h)$ l'angolo formato dai vettori $\mathbf{VA_1}$ e $\mathbf{VA_2}$. Dimostrare che

$$\lim_{h\to\infty} \alpha(h) = 0$$

Esercizio 3

Fissiamo nello spazio euclideo un sistema di riferimento cartesiano (O,**i**,**j**,**k**).

a)* Determinare le equazioni parametriche della retta *r* intersezione dei piani x=z e x+y=2.

b)*Scrivere le equazioni cartesiane delle due sfere di raggio $\sqrt{11}$ che hanno il centro sulla retta *r* e passano per l'origine.

c) Determinare la parte intera del raggio della circonferenza ottenuta intersecando le due sfere precedenti.

Esercizio 4

Consideriamo

- la forma lineare f di $\mathbf{R}^5$ in $\mathbf{R}$ definita da
$$f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = x_1+ x_2+ x_3+ x_4+ x_5,$$
- l'applicazione lineare diagonale D_f di $\mathbf{R}^5$ in $\mathbf{R}^3$definita da
$$D_f(\mathbf{x})=(f(\mathbf{x}),f(\mathbf{x}),f(\mathbf{x})),$$
- la proiezione P di $\mathbf{R}^5$ in $\mathbf{R}^3$definita da
$$P(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)=(x_1, x_2, x_3).$$

a)* Scrivere la matrice associata alla applicazione lineare D_f - P nelle basi canoniche.

b)* Calcolare la dimensione del nucleo di D_f - P e una sua base.

c) Generalizzando la situazione precedente, sia f la forma lineare di $\mathbf{R}^n$ in $\mathbf{R}$ definita da

$$f(x_1, x_2,..., x_n) = x_1+ x_2+ ... + x_n$$

e P la proiezione di $\mathbf{R}^n$ in $\mathbf{R}^m$ (m<n) sui primi m fattori. Calcolare la dimensione e una base esplicita per lo spazio vettoriale Ker (D_f - P).