Universita' di Roma Tor Vergata
Esame di Geometria 1 (Prof. Ghione)
aa. 2009-1024 Febbraio 2010

Nome e Cognome ....

Giustificare le risposte.

Esercizio 1

Dare la definizione di somma di sottospazi vettoriali.

Esercizio 2

Indicando con (x_1, x_2, x_3, x_4) un generico vettore di $\mathbf{R}^4$ e con $(y_{1,2}, y_{1,3}, y_{1,4}, y_{2,3}, y_{2,4}, y_{3,4})$ un generico vettore $\mathbf{R}^6$ si consideri l'applicazione lineare $F : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^6$ definita dalle equazioni

$$\begin{cases} y_{i,j} = x_i + x_j \\ 1 \leq i < j \leq 4 \end{cases}$$

a)* Calcolare la dimensione dell'immagine di F e dire se esistono fibre vuote e se esistono fibre formate da infiniti vettori.

b)* Sia W= *Span*($\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$, $\mathbf{e}_4$) il sottospazio di $\mathbf{R}^6$ generato dai primi 4 vettori della base canonica. Calcolare la dimensione e una base dello spazio $(\mathrm{Im}\, F) \cap W$

c) Sia m=n(n-1)/2 e $F : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ l'applicazione lineare definita dalle equazioni

$$\begin{cases} y_{i,j} = x_i + x_j \\ 1 \leq i < j \leq n \end{cases}$$

Calcolare la dimensione del sottospazio di $\mathbf{R}^m$ $(\mathrm{Im}\, F) \cap W_k$ essendo W_k lo spazio generato dai primi k vettori della base canonica di $\mathbf{R}^m$. $(1 \leq k \leq m)$

Esercizio 3

Fissato nello spazio euclideo un sistema di riferimento cartesiano $(O, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ consideriamo le retta *r* ed *s* rispettivamente di equazioni:

$$r : \begin{cases} x + y + z = 1 \\ x = 0 \end{cases} \qquad s : \begin{cases} x + y = 1 \\ z = 1 \end{cases}$$

a*) Scrivere le equazioni parametriche delle due rette e dire se sono o no complanari.

b*) Scrivere l'equazione del cilindro che ha come asse la retta *r* e che passa per l'origine delle coordinate. Dire quanto vale il raggio di tale cilindro.

c) Determinare le coordinate del punto A della retta *s* più vicino al cilindro.

Esercizio 4

Si consideri la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & t \\ 1 & -1 & 1 & t^2 \\ 1 & 1 & 1 & t^3 \\ 1 & -1 & 1 & t^4 \end{pmatrix}$$

a)* Calcolare il determinante di A mediante la riduzione di Gauss.

b)* Calcolare al variare del parametro t il rango di A.

c) Indicato con M lo spazio delle matrici 4x4, dare un esempio di funzione da M in R che sia multilineare e alternante nelle colonne e che assume il valore 3 sulla matrice identica.