

Universita' di Roma Tor Vergata
Esame di Geometria 1 (Prof. Ghione)
aa. 2009-10
27 Gennaio 2010

Nome e Cognome

Giustificare le risposte. Rispondere innanzitutto alle domande contrassegnate da un asterisco.

Esercizio 1

Dare la definizione matrice invertibile.

Esercizio 2

Consideriamo i seguenti vettori di $\mathbf{R}^4$: $\mathbf{u}_1=(0,1,1,-2)$, $\mathbf{u}_2=(1,1,0,0)$, $\mathbf{u}_3=(-1,0,0,1)$ e sia $V=\text{Span}(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3)$ e $W=\text{Span}(\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_1 + a\mathbf{u}_2 + b\mathbf{u}_3)$.

a)* Per quali valori di a e b $W=V$?

b)* Sia U lo ortogonale a W . Determinare i valori di a e b per i quali lo spazio U , contiene strettamente l'ortogonale di V e in quei casi trovare una base per U ?

c) Sia V uno spazio vettoriale di dimensione $n \geq 2$ e siano U e W due suoi sottospazi diversi di dimensione $n-1$. Dimostrare che la dimensione dello spazio ortogonale di $U \cap W$ è due.

Esercizio 3

Fissato nello spazio euclideo un sistema di riferimento cartesiano $(O, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ consideriamo la retta r di equazioni

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ y + z = 1 \end{cases}$$

e i punti $A=(1,1,0)$, $B=(0,1,1)$.

a*) Sia P un generico punto della retta r . Calcolare il perimetro del triangolo ABP al variare di P su r .

b*) Determinare, al variare di P su r , una equazione cartesiana per il piano che contiene A, B, P .

c) Dimostrare che l'area del triangolo APB è minima se e solo se il piano del triangolo passa per l'origine.

Esercizio 4

Al variare dei parametri a, b tra i numeri reali, si consideri il seguente sistema di equazioni lineari:

$$\begin{cases} 2x + 3y + 5z = 3 \\ x + y + 2z = 2 \\ ax + by + bz = a \end{cases}$$

a)* Usare il teorema dell'orlata per determinare i casi in cui il sistema è compatibile e in quei casi determinare le soluzioni.

b)* Determinare i casi in cui si applica la regola di Cramer.

c) Calcolare le soluzioni applicando la regola di Cramer nei casi trovati nel punto b).

