Universita' di Roma Tor Vergata
Esame di Geometria 1 (Prof. Ghione)
aa. 2008-09
27 Febbraio 2009

Nome e Cognome ....
Giustificare le risposte. Rispondere innanzitutto alle domande contrassegnate da un asterisco.

Esercizio 1
Dare la definizione di sottospazio vettoriale.

Esercizio 2
Consideriamo i vettori numerici a 6 componenti

$$\mathbf{u}_1=(1,0,0,0,0,0),\ \mathbf{u}_2=(1,1,0,0,0,0),\ \mathbf{u}_3=(1,1,1,0,0,0),\ \mathbf{u}_4=(1,1,1,1,0,0)$$
$$\mathbf{v}_1=(0,0,0,0,0,1),\ \mathbf{v}_2=(0,0,0,0,1,1),\ \mathbf{v}_3=(0,0,0,1,1,1),\ \mathbf{v}_4=(0,0,1,1,1,1)$$

e siano $U = \mathit{Span}(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4)$ e $V= \mathit{Span}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4)$.

a)* Dimostrare che dim U = dim V.
b)* Calcolare la dimensione e una base per lo spazio $U \cap V$.
c) Provare a generalizzare questa situazione.

Esercizio 3
Fissato nello spazio euclideo un sistema di riferimento cartesiano $(O,\mathbf{i},\mathbf{j},\mathbf{k})$ consideriamo i tre punti $A=(3,1,1)$, $B=(1,1,1)$, $C=(3,3,2)$.
a)* Calcolare le lunghezze dei lati e i coseni dei tre angoli del triangolo A,B,C. Ordinare i tre angoli e i tre lati dal più piccolo al più grande.
b)* Calcolare una equazione cartesiana del piano passante per A,B,C.
c) Descrivere il luogo dei centri delle sfere dello spazio che passano per A,B,C.

Esercizio 4
Sia $n \geq 1$ un numero naturale. Consideriamo l'applicazione lineare $F : \mathbf{R}^{2n} \to \mathbf{R}^2$ definita da

$$F((x_1, x_2,..., x_n, x_{n+1}, x_{n+2},..., x_{2n}))=(y_1,y_2)$$

dove

$$y_1= (x_1 + x_{n+1}) + (x_2 + x_{n+2}) +...+ (x_n + x_{2n})$$
$$y_2= (x_1 - x_{n+1}) + (x_2 - x_{n+2}) +...+ (x_n - x_{2n})$$

a)* Determinare la matrice associata ad F nelle basi canoniche e calcolare dimensione e base per Ker F.
b)* Sia

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

e sia L_A la relativa applicazione lineare di $\mathbf{R}^2$ in $\mathbf{R}^2$.
Determinare una applicazione lineare $G : \mathbf{R}^{2n} \to \mathbf{R}^2$ tale che $L_A \circ G = F$.
c) Considerando la stessa applicazione lineare $F : \mathbf{R}^{2n} \longrightarrow \mathbf{R}^2$ definita precedentemente, caratterizzare le matrici A, 2x2, per le quali esiste una G tale che $L_A \circ G = F$.

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{R}^{2n} & \xrightarrow{F} & \mathbf{R}^2 \\ \downarrow \mathrm{Id} & & \uparrow L_A \\ \mathbf{R}^{2n} & \xrightarrow{G} & \mathbf{R}^2 \end{array}$$