Geometria

Sessione estiva 02/07/2012

Prof. Franco Ghione e Stefano Trapani

Nome e cognome ....

La prova non sarà considerata sufficiente se non saranno sviluppate correttamente le parti a) di tutti gli esercizi. Le parti c) sono facoltative. Motivare le risposte.

Esercizio 1

a) Consideriamo la matrice A_a

$$A_a = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ a & 1 \end{pmatrix}$$

dire per quali valori del parametro a la matrice è invertibile e in quei casi calcolare l'inversa.

b) Indichiamo con **M**(2,2) lo spazio vettoriale delle matrici 2x2. Nel caso il cui A_a sia di rango 1 determinare la dimensione dello spazio vettoriale V definito da

$$V = \{X \in \mathbf{M}(2,2) \mid AXA=0\}$$

c) Sia F : $\mathbf{M}(2,2) \rightarrow \mathbf{M}(2,2)$ l'applicazione lineare definita da F(X)=AXA. Calcolare, al variare del parametro a, una base per Im F.

Esercizio 2

Fissato un sistema di riferimento (O,**i**,**j**,**k**) nello spazio euclideo tridimensionale, si consideri la retta r intersezione dei piani x+y=1 e y+z=0 e la sfera S di centro C=(1,0,0) e raggio 1.

a) Scrivere l'equazione cartesiana della sfera e calcolare le coordinate di punti dove la retta r interseca la sfera.

b) Sia P=(a,b,c) un generico punto della sfera. Calcolare la distanza di P da r.

c) Descrivere il luogo dei punti P della sfera per i quali la distanza di P da r è massima.

Esercizio 3

Sia A_a la matrice dell'esercizio 1 e sia $A_{(b,c)}$ la matrice

$$A_{(b,c)} = \begin{pmatrix} 1 & b \\ c & 1 \end{pmatrix}$$

a) Determinare per quali valori del parametro reale a la matrice A_a è diagonalizzabile sui complessi, e per quali valori lo è sui reali, e in tali caso trovare una base di autovettori.

b) Quali condizioni debbono soddisfare i parametri reali (b,c) perché la matrice $A_{(b,c)}$ non sia diagonalizzabile sui complessi?

c) Supponendo b=c provare che l'insieme

$$S=\{(a,b) : \text{le matrici } A_a \text{ e } A_{(b,b)} \text{ sono coniugate sui complessi}\}$$

(cioè esiste una matrice invertibile M a coefficienti complessi tale che $A_{(b,b)} = MAM^{-1}$)

nel piano $\mathbf{R}^2$ di coordinate (a,b) è una conica da cui sia stato tolto un punto. Determinare il punto tolto.