Compito per il 15/03/2024

1. Dato un intervallo $I = (a, b) \subset \mathbb{R}$ si consideri la funzione $d_I : I^2 \to \mathbb{R}_+$ definita da

$$d_I(x, y) = \left| \ln \frac{(b-x)(y-a)}{(b-y)(x-a)} \right| .$$

   (a) Si mostri che d_I è una distanza.

   (b) Si calcoli, $\lim_{n\to\infty} d_I(a + 1/n, (a + b)/2)$.

   (c) Quale è il diametro di I nella metrica d_I?

   (d) Data la funzione $f(x) = \frac{x-a}{b-a}$, con dominio I, si dica quale è l'immagine $J = f(I)$ e si calcoli il rapporto $\frac{d_J(f(x),f(y))}{d_I(x,y)}$.

   (e) Sia $I_n = (0, n)$, si calcoli $d_\infty(x, y) = \lim_{n\to\infty} d_{I_n}(x, y)$ e si mostri che è una metrica in $(0, \infty)$.

   (f) Data la funzione $f(x) = \frac{x-a}{b-x}$, con dominio I, si dica quale è l'immagine $J = f(I)$ e si calcoli il rapporto $\frac{d_\infty(f(x),f(y))}{d_I(x,y)}$.

I punteggi, nel discutibile stile americano, saranno A,B,C e E, dove E significa che la soluzione non è ritenuta sufficiente. Alla fine si avranno tre punti se si sono ottenuti, almeno nei due terzi dei compiti, A; 2 punti se si sono ottenuti, almeno nei due terzi dei compiti, A o B; un punto se si sono ottenuti, almeno nei due terzi dei compiti, A, B o C.

Soluzione

1. Soluzione dell'esercizio 1:

   (a) L'unica cosa che non è immediatamente ovvia è la disuguaglianza triangolare

   $$\begin{aligned} d_I(x,y) &= \left|\ln \frac{(b-x)(z-a)(b-z)(y-a)}{(x-a)(b-z)(z-a)(b-y)}\right| \\ &= \left|\ln \frac{(b-x)(z-a)}{(x-a)(b-z)} + \frac{(b-z)(y-a)}{(z-a)(b-y)}\right| \leqslant \left|\ln \frac{(b-x)(z-a)}{(x-a)(b-z)}\right| + \left|\frac{(b-z)(y-a)}{(z-a)(b-y)}\right| \\ &= d_I(x,z) + d_I(z,y). \end{aligned}$$

   (b) Si noti che, se $\frac{1}{n} \leqslant b-a$, allora

   $$\begin{aligned} d_I(a+1/n,(a+b)/2) &= \left|\ln \frac{(b-a-1/n)((a+b)/2-a)}{(1/n)(b-(a+b)/2)}\right| = |\ln(b-a-1/n)n| \\ &= \ln[(b-a)n-1]. \end{aligned}$$

   Quindi $\lim_{n\to\infty} d_I(a+1/n,(a+b)/2) = \infty$.

   (c) Visto il punto precedente il diametro è chiaramente infinito.

   (d) $J = (0,1)$, quindi

   $$\begin{aligned} d_J(f(x),f(y)) &= \left|\ln \frac{(1-f(x))f(y)}{f(x)(1-f(y))}\right| = \left|\ln \frac{(1-\frac{x-a}{b-a})\frac{y-a}{b-a}}{\frac{x-a}{b-a}(1-\frac{y-a}{b-a})}\right| \\ &= \left|\ln \frac{(b-x)(y-a)}{(x-a)(b-y)}\right| = d_I(x,y) \end{aligned}$$

   ovvero, rispetto a queste metriche f è una isometria.

   (e) Per ogni $x,y \in (0,\infty)$, per ogni $n > \max\{x,y\}$ si ha

   $$d_{I_n}(x,y) = \left|\ln \frac{(n-x)y}{(n-y)x}\right| = \left|\ln \frac{(1-x/n)y}{(1-y/n)x}\right|.$$

   dunque

   $$d_\infty(x,y) = \left|\ln \frac{y}{x}\right|.$$

   Si può facilmente dimostrare che è una norma argomentando come nel punto (a).

   (f) $J = (0,\infty)$, quindi

   $$d_\infty(f(x),f(y)) = \left|\ln \frac{f(x)}{f(y)}\right| = d_I(x,y).$$

   Un'altra isometria!