Calcolo II

Esame del 27/09/2024

Cognome.......................... Nome..........................

Avete 3:00 ore di tempo. Ogni esercizio vale 6 punti. Solo le **risposte chiaramente giustificate** saranno prese in considerazione. Le parti degli elaborati scritte in maniera **disordinata** o **incomprensibile** saranno **ignorate**.

1. Dato $r > 0$, si concideri l'insieme $P(r) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \; : \; 0 \leqslant rz \leqslant r^2 - x^2 - y^2\}$. Si calcoli l'area della superficie di $P(r)$.
2. Si determini il numero di soluzioni del sistema
$$\begin{aligned} &x^2 + y - 2 = 0 \\ &y^2 + x^2 - 3 = 0. \end{aligned}$$
3. Si trovino i punti stazionari della funzione $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, definita da $f(x, y, z) = x^3 - 2y + z$, sulla superficie della sfera di centro zero e raggio uno.
4. Si dica se la norma Euclidea in $\mathbb{R}^n$ è una funzione differenziabile. Esistono norme che si comportano in modo diverso in zero?
5. Si risolva l'equazione differenziale
$$\begin{aligned} &\dot{x} = x + y \\ &\dot{y} = y \\ &x(0) = 0, y(0) = 1 \end{aligned}$$

Soluzione

1. Ovviamente l'area della base è πr^2. La parte curva della superficie (un segmento di un paraboloide) si può parametrizzare con $f : [0, r] \times [0, 2\pi) \to \mathbb{R}^2$ definita come

$$f(\rho, \theta) = \left(\rho \cos\theta, \rho \sin\theta, r - \frac{\rho^2}{r}\right).$$

   Ne segue che l'area di S è data da

$$\begin{aligned} S &= \pi r^2 + \int_0^r d\rho \int_0^{2\pi} d\theta \|\partial_\rho f \wedge \partial_\theta f\| = \pi r^2 + \int_0^r d\rho \int_0^{2\pi} d\theta \rho \sqrt{1 + 4\frac{\rho^2}{r^2}} \\ &= \pi r^2 + \pi \int_0^{r^2} du \sqrt{1 + 4\frac{u}{r^2}} = \pi r^2 + \frac{\pi}{6} r^2 \left[5^{\frac{3}{2}} - 1\right] = \frac{5}{6}(\sqrt{5} + 1)\pi r^2. \end{aligned}$$

2. Sostituendo la prima nella seconda si ha

$$p(x) := x^4 - 3x^2 + 1 = 0$$

   Si noti che $p'(x) = 4x^3 - 6x$, dunque gli zeri della derivata sono $\{0, \pm\sqrt{3/2}\}$. Poichè $p(0) = 0$ e $p(\pm\sqrt{3/2}) = -\frac{5}{4}$, ne segue che $p(x) = 0$ ha 4 soluzioni e quindi il sistema ha 4 soluzioni.

3. Cominciamo col trovare i punti stazionari. Applicando il metodo dei moltiplicatori di Lagrange è sufficiente trovare i punti stazionari della funzione $g(x, \lambda) = x^3 - 2y + z + \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 1)$. Questi soddifano l'equazione

$$\begin{aligned} &3x^2 + 2\lambda x = 0 \\ &-2 + 2\lambda y = 0 \\ &1 + 2\lambda z = 0 \\ &x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0. \end{aligned}$$

   Le soluzioni sono delle prime tre equazioni sono $x = 0, y = \lambda^{-1}, z = -\frac{1}{2\lambda}$ e $x = 2\lambda/3$, $y = \lambda^{-1}, z = -\frac{1}{2\lambda}$. Il primo corrisponde al punto stazionario, $x = 0$ $y = 2/\sqrt{5}$, $z = -1/\sqrt{5}$, mentre il secondo non corrisponde a nessun punto sulla sfera.

4. La norma Euclidea è $f(x) = \|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$. Dunque se $x \neq 0$, allora $\partial_{x_i} f(x) = \frac{x_i}{\|x\|}$. Ma se $x = 0$ si ha

$$\lim_{h \to 0} \frac{\|he_i\|}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{|h|}{h}$$

   quindi le derivate parziali non esistono per cui la funzione non è differenziabile. Poichè per ogni norma si ha $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$ ne segue che lo stesso accade per tutte le norme.

5. La soluzione della seconda equazione è $y(t) = e^t$ da cui segue che la soluzione della prima è $x(t) = te^t$.