Analisi 2

Primo esonero, 18-04-24

Cognome......................... Nome.........................

Avete 2:00 ore di tempo. Ogni esercizio vale 10 punti. Solo le **risposte chiaramente giustificate** saranno prese in considerazione. Le parti degli elaborati scritte in maniera **disordinata** o **incomprensibile** saranno **ignorate**.

1. Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \|x\|^4$. Sia $x_0 = \frac{1}{4}(1,1,1)$ e si definisca la sucessione
$$x_{n+1} = x_n - \nabla f(x_n).$$
Si dimostri che x_n converge al minimo di f.

2. Si studi il limite
$$\lim_{(x,y,z)\to 0} \frac{x^2yz}{x^2+y^2+z^2}$$

3. Si trovino i punti stazionari della funzione
$$f(x) = x^2y^2\sin(x+y).$$
Si ne discutano i massimi e minimi.

Soluzione

1. Si noti che $x_{n+1} = (1 - 2\|x_n\|^2)x_n$, dunque se $\|x_n\| \leqslant 1$ allora $\|x_n\|$ è decrescente. Questo è vero per x_0 e quindi rimane vero per tutti gli n. Questo significa che la successione $\|x_n\|$ converge. Se $\inf_{n\in\mathbb{N}} \|x_n\| = a > 0$ allora si avrebbe $\|x_n\| \leqslant (1-a)^n\|x_0\|$, che è una contraddizione per n abbastanza grande.

2. Si noti che $|x^2yz| \leqslant x^2(x^2+y^2+z^2)$, oppure che $\frac{x^2}{x^2+y^2+z^2} \leqslant 1$, entrambe le cose implicano immediatamente che il limite esiste ed è zero.

3. Per trovare i punti stazionari occorre risolvere l'equazione

$$\begin{aligned}\partial_x f &= 2xy^2\sin(x+y) + x^2y^2\cos(x+y) = 0\\ \partial_y f &= 2x^2y\sin(x+y) + x^2y^2\cos(x+y) = 0\end{aligned}$$

Le rette $x=0$ e $y=0$ soddisfano tali equazioni. Fuori da queste rette si ha

$$\begin{aligned}2\sin(x+y) + x\cos(x+y) = 0\\ 2\sin(x+y) + y\cos(x+y) = 0\end{aligned}$$

ovvero

$$\begin{aligned}(x-y)\cos(x+y) = 0\\ 2\sin(x+y) + y\cos(x+y) = 0\end{aligned}$$

se $x = y$ la prima equazione è soddisfatta mentre la seconda da

$$2\sin(2x) + x\cos(2x) = 0 \tag{1}$$

Cioè $x = -2\tan(2x)$ che ha una soluzione in ogni intervallo $(k\pi/2 - \pi/4, (k+1)\pi/2)$ $k \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$.

Se invece $x \neq y$ allora deve essere $x+y = (2n+1)\frac{\pi}{2}$, ma questo non risolve l'altra equazione.

Vediamo dunque se tali punti sono massimi o minimi. Si noti che per x vicini a zero possiamo scrivere

$$f(x,y) = x^2y^2\left[\sin y + x\cos y + \mathcal{O}(x^2)\right] = x^2y^2\sin y + \mathcal{O}(x^3y^2).$$

Poichè il primo termine è il più grande, si ha che $(0,y)$ è un massimo se $\sin y < 0$ e un minimo se $\sin y > 0$. Rimane il caso $y = k\pi$. In tal caso scriviamo $y = k\pi + \xi$ e

$$\begin{aligned}f(x, k\pi+\xi) &= x^2k^2\pi^2\left[(-1)^k\xi + x(-1)^k + \mathcal{O}(x^2+\xi^2)\right] + 2x^2k\pi\xi\left[x(-1)^k + \mathcal{O}(x^2+\xi)\right]\\ &= x^2\xi(-1)^kk^2\pi^2 + x^3k^2\pi^2(-1)^k + \mathcal{O}(x^4+\xi^2)\end{aligned}$$

che quindi non è nè massimo nè minimo.

Rimangono da studiare i punti per cui $x = y$ e $x = -2\tan(2x)$. Calcoliamo la seconda derivata per $x = y$,

$$\begin{pmatrix}2x^2\sin(2x) + 4x^3\cos(2x) - x^4\sin(2x) & 4x^2\sin(2x) + 4x^3\cos(2x) - x^4\sin(2x)\\ 4x^2\sin(2x) + 4x^3\cos(2x) - x^4\sin(2x) & 2x^2\sin(2x) + 4x^3\cos(2x) - x^4\sin(2x)\end{pmatrix} =$$
$$= x^2\cos(2x)\begin{pmatrix}2\tan(2x) + 4x - x^2\tan(2x) & 4\tan(2x) + 4x - x^2\tan(2x)\\ 4\tan(2x) + 4x - x^4\tan(2x) & 2\tan(2x) + 4x - x^2\tan(2x)\end{pmatrix}$$

Ponendo $x = -2\tan(2x)$ otteniamo

$$x^2\cos(2x)\begin{pmatrix} -x+4x+x^3/2 & -2x+4x+x^3/2 \\ -2x+4x+x^3/2 & -x+4x+x^3/2 \end{pmatrix} =$$
$$= x^3\cos(2x)\begin{pmatrix} 3+x^2/2 & 2+x^2/2 \\ 2+x^2/2 & 3+x^2/2 \end{pmatrix}$$

Si noti che il coseno è zero solo se $2x = \pi/2 + k\pi$, ma in qual caso la equazione (1) non ha soluzioni. Possiamo quindi assumere che $\alpha(x) = x^3\cos(2x)$ sia diverso da zero. Dobbiamo quinid trovare gli autovalori della matrice delle derivate secondo, ovvero dobbiamo risolvere

$$\det\begin{pmatrix} \lambda-\alpha(x)(3+x^2/2) & -\alpha(x)(2+x^2/2) \\ -\alpha(x)(2+x^2/2) & \lambda-\alpha(a)(3+x^2/2) \end{pmatrix} = 0$$

ponendo $\xi = \lambda\alpha(x)^{-1} - 1$ si ha

$$\det\begin{pmatrix} \xi-2-x^2/2 & -2-x^2/2 \\ -2-x^2/2 & \xi-2-x^2/2 \end{pmatrix} = 0$$

Ovvero

$$(\xi-2-x^2/2)^2 - (2+x^2/2)^2 = 0$$

che implica $\xi^2 - 2(2+x^2/2)\xi = 0$ ovvero abbiamo le soluzioni $\xi = 0$ e $\xi = 4+x^2$. In conclusione, i due autovalori sono $\lambda_1(x) = x^3\cos(2x)$ e $\lambda_2(x) = x^3\cos(2x)(5+x^2)$. Dunque i due autovalori hanno lo stesso segno che dipende dal segno di x e del coseno. Poichè i punti stazionari accadono per x in ogni intervallo $(k\pi/2-\pi/4,(k+1)\pi/2)$ $k \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$, ne segue che abbiamo una serie di massimi e minini alternati.