Analisi 2

Secondo esonero, 30-05-24

Cognome......................... Nome.........................

Avete 2:00 ore di tempo. Ogni esercizio vale 10 punti. Solo le **risposte chiaramente giustificate** saranno prese in considerazione. Le parti degli elaborati scritte in maniera **disordinata** o **incomprensibile** saranno **ignorate**.

1. Dati i vettori $v_1 = (1, 0, 0)$, $v_2 = (1, 0, 0)$ e $v_3 = (0, 0, 1)$ si calcoli il volume della regione $P = \{\sum_{i=1}^{3} \lambda_i v_i \ : \ \lambda_i \geqslant 0, \sum_{i=1}^{3} \lambda_i \leqslant 1\}$.
2. Si calcoli la lunghezza della curva $\gamma(t) = (t, at^{\frac{3}{2}} + 3)$, $t \in [0, 1]$.
3. Sia $\gamma(t) = (\cos t, \sin t, t)$, $t \in [0, 2\pi]$ e $f(x) = \frac{x}{\|x\|^2}$, $x \in \mathbb{R}^3 \backslash \{0\}$, si calcoli

$$\int_0^{2\pi} \langle f \circ \gamma(t), \gamma'(t) \rangle dt.$$

   Si commenti il risultato.

Soluzioni

1. Si noti che $x = (x_1, x_2, x_3) \in P$ solo se $x_i \geqslant 0$ e $\sum_{i=1}^{3} x_i \leqslant 1$. Dunque si tratta dei punti nel quadrante positivo che sono da un lato del piano $x_1 + x_2 + x_3 = 1$. Possiamo quindi introdurre $D = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x_1, x_2 \geqslant 0, x_1 + x_2 \leqslant 1\}$ e scrivere

$$P = \{x \in \mathbb{R}^3 \ : \ (x_1, x_2) \in D, 0 \leqslant x_3 \leqslant 1 - x_1 - x_2\}$$

D'altro canto

$$D = \{x \in \mathbb{R}^2 \ : \ x_1 \in [0,1], 0 \leqslant x_2 \leqslant 1 - x_1\}.$$

Dunque D è un dominio regolare e lo stesso vale per P. Possiamo quindi usare il teorema di Fubini per scrivere

$$\begin{aligned}\mathrm{Vol}(P) &= \int_P dx_1 dx_2 dx_3 = \int_0^1 dx_1 \int_0^{1-x_1} dx_2 \int_0^{1-x_1-x_2} dx_3 \\ &= \int_0^1 dx_1 \int_0^{1-x_1} dx_2 (1 - x_1 - x_2) = \int_0^1 dx_1 \left[(1-x_1)^2 - \frac{1}{2}(1-x_2)^2 \right] \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 dx_1 x_1^2 = \frac{1}{6}.\end{aligned}$$

Che corrisponde al volume della piramide, base $(\frac{1}{2})$ per altezza (1) diviso 3, che ci hanno insegnato alle medie.

2. Sappiamo che

$$\begin{aligned}\text{lunghezza}(\gamma) &= \int_0^1 \|\gamma'(t)\| dt = \int_0^1 \sqrt{1 + \frac{9a^2}{4} t} dt \\ &= \frac{8}{27a^2} \left[\left(1 + \frac{9a^2}{4}\right)^{\frac{3}{2}} - 1 \right].\end{aligned}$$

3. Un calcolo diretto produce

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} \langle f \circ \gamma(t), \gamma'(t) \rangle dt &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{1+t^2} \langle (\cos t, \sin t, t), (-\sin t, \cos t, 1) \rangle dt \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{t}{1+t^2} dt = \ln\left(\sqrt{1 + 4\pi^2}\right).\end{aligned}$$

Si noti che f è chiusa (ovvero $\partial_{x_i} f_j = \partial_{x_j} f_i$), dunque se una curva chiusa può essere deformata nell'altra, rimanendo nel dominio, il valore dell'integrale non cambia. D'altro canto il dominio è $\mathbb{R}^3 \backslash \{0\}$ che è un insieme semplicemente connesso, ovvero qualunque curva chiusa può essere deformata in un'altra. Ma allora la f deve essere il gradiente di un potenziale. Infatti

$$\nabla(\ln \|x\|) = f(x).$$

Che infatti permette di calcolare immediatamente

$$\int_0^{2\pi} \langle f \circ \gamma(t), \gamma'(t) \rangle dt = \int_0^{2\pi} \langle \nabla(\ln \| \cdot \|) \circ \gamma(t), \gamma'(t) \rangle dt = \int_0^{2\pi} \frac{d}{dt} \ln \|\gamma(t)\| = \ln\left(\sqrt{1 + 4\pi^2}\right).$$