

Calcolo II

Esame del 19/09/2025

Cognome..... Nome.....

Avete 3:00 ore di tempo. Ogni esercizio vale 8 punti. Solo le **risposte chiaramente giustificate** saranno prese in considerazione. Le parti degli elaborati scritte in maniera **disordinata** o **incomprensibile** saranno **ignorate**.

1. Si calcoli il volume della regione $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 2x^2 + y^2 + xy + z^2 + 3x + 2y \leq 0\}$.
2. Si calcoli il volume della palla quadridimensionale

$$B^4 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 \leq 1\}.$$

3. Data la funzione $g : \{(x, y) : xy \neq 0\} \rightarrow \mathbb{R}$, definita da

$$g(x, y) = \frac{\sin(\sqrt{|xy|})}{\sqrt{|xy|}},$$

si studi il limite

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} g(x, y)$$

4. Si consideri la curva

$$\gamma(t) = (\cos t, \sin t, t), \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Consideriamo il campo vettoriale

$$F(x, y, z) = (-y, x, 0).$$

- (a) Calcolare l'integrale di linea

$$I = \int_{\gamma} F.$$

- (b) Calcolare la lunghezza della curva

$$J = \int_{\gamma} \|\dot{\gamma}(t)\| dt.$$

Soluzione

1. Scriviamo la parte quadratica in forma matriciale:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}, \quad \ell = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

da cui si ha $\langle (x, y), A(x, y) \rangle + \langle \ell, (x, y) \rangle + z^2 \leq 0$. Poniamo $(u, v) = (x, y) - c$, allora

$$0 \geq \langle (u, v), A(u, v) \rangle + \langle (u, v), A(A^{-1}\ell + 2c) \rangle + \langle c, Ac \rangle + \langle \ell, c \rangle + z^2.$$

Ponendo

$$c = -\frac{1}{2}A^{-1}\ell = \left(-\frac{4}{7}, -\frac{5}{7}\right).$$

si ottiene

$$0 \geq \langle (u, v), A(u, v) \rangle + \langle c, Ac \rangle + \langle \ell, c \rangle + z^2 = \langle (u, v), A(u, v) \rangle + z^2 \leq \frac{11}{7}.$$

La matrice A essendo diagonale può essere diagonalizzata da una matrice ortogonale U :

$$U^*AU = \Lambda^2 = \begin{pmatrix} \lambda_+ & 0 \\ 0 & \lambda_- \end{pmatrix}, \quad \lambda_{\pm}^2 = \frac{3 \pm \sqrt{2}}{2}. \quad \text{Da cui, ponendo } (u, v) = U\Lambda^{-\frac{1}{2}}(a, b),$$

$$\begin{aligned} E &= \int_{\{\langle (u, v), A(u, v) \rangle + z^2 \leq \frac{11}{7}\}} dudvdz = \frac{2}{\sqrt{7}} \int_{\{a^2 + b^2 + z^2 \leq \frac{11}{7}\}} dadbdz \\ &= \frac{88\sqrt{11}}{147}\pi. \end{aligned}$$

2. possiamo scrivere $B^4 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \leq 1, |x_4| \leq \sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2}\}$.
Quindi, ponendo $B^3 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \leq 1\}$,

$$\text{Vol}(B^4) = 2 \int_{B^3} dx_1 dx_2 dx_3 \int_0^{\sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2}} dx_4 = 2 \int_{B^3} dx_1 dx_2 dx_3 \sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2}.$$

Usando le coordinate polari si ha

$$\text{Vol}(B^4) = 2 \int_0^1 d\rho \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^\pi d\varphi \rho^2 \sin \varphi \sqrt{1 - \rho^2} = 8\pi \int_0^1 d\rho \rho^2 \sqrt{1 - \rho^2}.$$

Facciamo il cambio di variabili $\rho = \sin \alpha$ e scriviamo

$$\begin{aligned} \text{Vol}(B^4) &= 8\pi \int_0^{\pi/2} d\alpha \cos^2 \alpha \sin^2 \alpha = 2\pi \int_0^{\pi/2} d\alpha (\sin(2\alpha))^2 = \pi \int_0^\pi d\alpha (\sin \alpha)^2 \\ &= \frac{\pi}{2} \int_0^\pi d\alpha (1 - \cos(2\alpha)) = \frac{\pi^2}{2}. \end{aligned}$$

3. Poniamo $u = xy$ e fissiamo $\varepsilon > 0$. Esiste $\eta > 0$ tale che, per ogni u con $0 < |u| < \eta$, si abbia $\left|\frac{\sin u}{u} - 1\right| < \varepsilon$ (questa è la definizione del limite unidimensionale). Poniamo $\delta = \eta^2$.
Se (x, y) appartiene al dominio di g e soddisfa $\sqrt{x^2 + y^2} < \delta$, allora in particolare $|xy| \leq \frac{(x^2 + y^2)}{2} < \frac{\delta^2}{2}$, per cui $u = \sqrt{|xy|} < \delta = \eta^2 < \eta$. Di conseguenza $|g(x, y) - 1| = \left|\frac{\sin u}{u} - 1\right| < \varepsilon$.
Questo dimostra che il limite è 1.

In maniera più diretta, cambiando variabile nel limite,

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{\sin(\sqrt{|xy|})}{\sqrt{|xy|}} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\sin u}{u} = 1.$$

4. Deriviamo la parametrizzazione:

$$\dot{\gamma}(t) = (-\sin t, \cos t, 1).$$

Valutiamo il campo lungo la curva:

$$F(\gamma(t)) = (-\sin t, \cos t, 0).$$

L'integrando $F(\gamma(t)) \cdot \dot{\gamma}(t)$ è

$$F(\gamma(t)) \cdot \dot{\gamma}(t) = (-\sin t)(-\sin t) + (\cos t)(\cos t) + 0 \cdot 1 = \sin^2 t + \cos^2 t = 1.$$

Quindi

$$I = \int_0^{2\pi} 1 \, dt = 2\pi.$$

Abbiamo $\dot{\gamma}(t) = (-\sin t, \cos t, 1)$, quindi

$$\|\dot{\gamma}(t)\| = \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t + 1} = \sqrt{2}.$$

La lunghezza della curva è quindi

$$J = \int_0^{2\pi} \sqrt{2} \, dt = 2\pi\sqrt{2}.$$