Calcolo II

Esame del 22/12/2025

Cognome.......................... Nome..........................

Avete 3:00 ore di tempo. Ogni esercizio vale 8 punti. Solo le **risposte chiaramente giustificate** saranno prese in considerazione. Le parti degli elaborati scritte in maniera **disordinata** o **incomprensibile** saranno **ignorate**.

1. Sia $\gamma(t) = (\cos t, \sin t, t)$, $t \in [0, 2\pi]$ e $f(x) = \frac{x}{\|x\|^2}$, $x \in \mathbb{R}^3 \backslash \{0\}$, si calcoli

$$\int_0^{2\pi} \langle f \circ \gamma(t), \gamma'(t) \rangle dt.$$

   Si dica se f ammette un potenziale.

2. Si calcoli $\sum_{k=2}^{10^{20}} \frac{1}{k \ln k}$ con un errore minore di $\frac{1}{2}$.

3. Dato un vettore $v \in \mathbb{R}^2$, $\|v\| = 1$, si consideri la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definita da

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^{\langle x, v \rangle^2} - 1}{\|x\|^2} & \text{if } x \neq 0 \\ 0 & \text{if } x = 0 \end{cases}$$

   - Per quali x la funzione f è continua?
   - Per quali x la funzione f è differenziabile?
   - Se $v = (1, 0)$, per quali $x = (x_1, x_2)$ esiste $\partial_{x_2} f$?

4. Si calcoli il volume del cono di altezza h e base di raggio r.

Soluzione

1. Un calcolo diretto produce

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} \langle f\circ\gamma(t), \gamma'(t)\rangle dt &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{1+t^2}\langle(\cos t, \sin t, t), (-\sin t, \cos t, 1)\rangle dt \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{t}{1+t^2} dt = \ln\left(\sqrt{1+4\pi^2}\right).\end{aligned}$$

Si noti che f è chiusa (ovvero $\partial_{x_i} f_j = \partial_{x_j} f_i$), dunque se una curva chiusa può essere deformata nell'altra, rimanendo nel dominio, il valore dell'integrale non cambia. D'altro canto, il dominio è $\mathbb{R}^3\backslash\{0\}$ che è un insieme semplicemente connesso, ovvero qualunque curva chiusa può essere deformata in un'altra. Ma allora la f deve essere il gradiente di un potenziale. Infatti

$$\nabla(\ln\|x\|) = f(x).$$

Che infatti permette di calcolare immediatamente

$$\int_0^{2\pi} \langle f\circ\gamma(t), \gamma'(t)\rangle dt = \int_0^{2\pi} \langle\nabla(\ln\|\cdot\|)\circ\gamma(t), \gamma'(t)\rangle dt = \int_0^{2\pi} \frac{d}{dt}\ln\|\gamma(t)\| = \ln\left(\sqrt{1+4\pi^2}\right).$$

2. Sia $F(x) = \ln\ln x$, allora $F'(x) = \frac{1}{x\ln x}$ e $F''(x) = -\frac{1}{x^2\ln x} - \frac{1}{x^2(\ln x)^2}$. Quindi, usando l'espansione di Taylor al secondo ordine abbiamo

$$F(k+1) - F(k) = \frac{1}{k\ln k} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\xi_k^2\ln\xi_k} + \frac{1}{\xi_k^2(\ln\xi_k)^2}\right).$$

Da cui abbiamo

$$\begin{aligned}\left|F(m+1) - F(n) - \sum_{k=n}^{m}\frac{1}{k\ln k}\right| &\leqslant \frac{1}{2}\sum_{k=n}^{m}\frac{1}{\xi_k^2\ln\xi_k} + \frac{1}{\xi_k^2(\ln\xi_k)^2} \leqslant \sum_{k=n}^{m}\frac{1}{k^2} \leqslant \sum_{k=n}^{m}\left[\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right] \\ &= \frac{1}{n-1} - \frac{1}{m-1}.\end{aligned}$$

Ne segue

$$\left|\sum_{k=2}^{10^{20}}\frac{1}{k\ln k} - \left[\ln\left(\ln(10^{20}+1)\right) - \ln\ln 2 + \frac{1}{2\ln 2} + \frac{1}{3\ln 3}\right]\right| < \frac{1}{3}.$$

Qundi $\sum_{k=2}^{10^{20}}\frac{1}{k\ln k} = 5.1 \pm \frac{1}{2}$.

3. La funzione è differenziabile per tutti gli $x \neq (0,0)$ poiché è la composizione di funzioni differenziabili. Per sapere se è continua occorre studiare il limite

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{\langle x,v\rangle^2} - 1}{\|x\|^2}$$

Si noti che se $v^\perp$, $\|v^\perp\| = 1$, è perpendicolare a v allora

$$\lim_{t\to 0}\frac{e^{\langle tv^\perp,v\rangle^2} - 1}{t^2} = 0$$

Mentre

$$\lim_{t\to 0}\frac{e^{\langle tv,v\rangle^2} - 1}{t^2} = 1.$$

Dunque il limite non esiste e la funzione non è continua in zero e perciò neppure differenziabile. Rimane da studiare la derivata parziale in $(0,0)$. Chiaramente $\partial_{x_2} f(0,0)$ esiste solo se esiste il limite

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(t(0,1)) - f(0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{e^{\langle t(0,1),(1,0)\rangle^2} - 1}{t^3} = 0$$

Dunque $\partial_{x_2} f(x)$ esiste per tutti gli $x \in \mathbb{R}^2$.

4. Il cono è dato dall'unsieme dei punti $C := \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \;:\; x_1^2 + x_2^2 \leqslant r^2,\, 0 \leqslant x_3 \leqslant h - \frac{h}{r}\sqrt{x_1^2 + x_2^2} \right\}$.
Quindi il volume è dato da

$$\int_C dx_1 dx_2 dx_3$$

È conveniente usare le coordinate cilindriche $x_1 = \rho\cos\theta$, $x_2 = \rho\sin\theta$, $x_3 = z$. Cambiando coordiante si ha

$$\int_C dx_1 dx_2 dx_3 = \int_0^r d\rho \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{h-\frac{h\rho}{r}} \rho dz = 2\pi \int_0^r h(1 - \frac{\rho}{r})\rho = \frac{\pi}{3} r^2 h.$$