Calcolo I

Esame 16/01/2017

Cognome......................... Nome..........................

Avete 3:00 ore di tempo. Ogni esercizio vale 5 punti. Solo le **risposte chiaramente giustificate** saranno prese in considerazione. Le parti degli elaborati scritte in maniera **disordinata** o **incomprensibile** saranno **ignorate**.

1. Si consideri la successione $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ definita ricorsivamente da $a_0 = -\frac{1}{2}$, $a_{n+1} = (a_n+1)^2-1$. Si studi
$$\lim_{n\to\infty} a_n.$$

2. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tale che $f(0) = 0$ e
$$f'(x) = \left[2 + x^2 + \cos x\right]^{-1}.$$
Si dica se esiste il limite
$$\lim_{x\to\infty} f(x).$$

3. Sia $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, si calcoli
$$\lim_{n\to\infty} n \int_0^{2\pi} \sin(ny) \cdot f(y)dy.$$

4. Si tracci il grafico della funzione
$$f(x) = \frac{1 + x^2}{x^2 + 2x - 1}.$$

5. Tra tutti i vettori $v \in \mathbb{R}^n$ tali che $\|v\| = 1$, si trovino quelli per cui $\sum_{i=1}^n v_i$ è massimo.[1]

6. Data la forma differenziale su $\mathbb{R}^2/\{0\}$
$$\omega = \frac{y}{x^2 + y^2}dx - \frac{x}{x^2 + y^2}dy,$$
si dica se è esatta.

[1]Con $\|\cdot\|$ intendo la norma euclidea.

Soluzione

1. Prima di tutto si noti che $a_n \geqslant -1$. Inoltre se $a_n \in (-1, 0)$ allora $a_{n+1} < 1 - 1 \leqslant 0$. Dunque abbiamo $a_n \in (-1, 0)$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Se il limite esiste allora, detto ℓ il limite, questo deve soddisfare $\ell = (\ell + 1)^2 - 1 = \ell^2 + 2\ell$. In alte parole $\ell \in \{-1, 0\}$. D'altra parte, se $a_n \in (-1, 0)$, allora
$$a_{n+1} = a_n(a_n + 2) \leqslant a_n(-1 + 2) = a_n.$$
Dunque la successione è monotona decrescente e inferiormente limitata, quindi ha limite. Ne segue
$$\lim_{n\to\infty} a_n = -1.$$
In alternativa, osservando un poco la ricorrenza si poteva indovinare come è fatta la successione: $a_n = -1 + 2^{-2^n}$. Cosa che si può facilmente verificare poi per induzione. Una volta che si ha tale formula esplicita il calcolo del limite è banale.

2. Per il teorema fondamentale del calcolo
$$f(x) = \int_0^x \left[2 + y^2 + \cos y\right]^{-1} dy.$$
Poichè $f' \geqslant 0$, f è monotona crescente quindi ha limite se e solo se è limitata. Per verificare questo basta una stima superiore:
$$f(x) \leqslant \int_0^x \left[1 + y^2\right]^{-1} dy = \arctan x \leqslant \frac{\pi}{2}.$$
Dunque il limite esiste ed è inferiore a $\frac{\pi}{2}$.

3. Integrando per parti si ha
$$\begin{aligned} n\int_0^{2\pi} \sin(ny)\cdot f(y)dy &= f(0) - f(2\pi) + \int_0^{2\pi} \cos(ny)f'(y)dy \\ &= f(0) - f(2\pi) - \frac{1}{n}\int_0^{2\pi} \sin(yn)f''(y)dy. \end{aligned}$$
Poichè $\left|\int_0^{2\pi} \sin(yn)f''(y)dy\right| \leqslant 2\pi \sup_{x\in[0,2\pi]} |f''(x)| < \infty$, si ha
$$\lim_{n\to\infty} n\int_0^{2\pi} \sin(ny)\cdot f(y)dy = f(0) - f(2\pi).$$

4. Il denominatore si annulla per $x = -1 \pm \sqrt{2}$, inoltre
$$\begin{aligned} &\lim_{x\to\infty} f(x) = 1, \\ &f'(x) = 2\frac{x^2 - 2x - 1}{[x^2 + 2x - 1]^2}. \end{aligned}$$
Dunque la derivata si annulla per $x = 1 \pm \sqrt{2}$. Si noti inoltre che $f(0) = -1$. Queste informazioni sono più che sufficienti per tracciare il grafico.

5. Date le funzioni $g, f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definite come $g(v) = \|v\|^2 - 1$ e $f(v) = \sum_{i=1}^n v_i$, dove $v = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n$, il problema consiste nello studiare il massimo di f sotto il vincolo $g = 0$. Si noti che $0 = \nabla g(v) = 2v$ implica $v = 0$, e che $v = 0$ non soddisfa il vincolo. Valgono dunque le ipotesi per applicare il metodo dei moltiplicatori di Lagrange. Dobbiamo quindi trovare i punti stazionari della funzione $F(v, \lambda) = f(v) + \lambda g(v)$ che sono dati da

$$
\begin{aligned}
0 &= \partial_{v_i} F(v, \lambda) = 1 - 2\lambda v_i \\
0 &= \partial_\lambda F(v, \lambda) = g(v).
\end{aligned}
$$

Dalle prime n equazioni segue $v_i = (2\lambda)^{-1}$, $i \in \{1, \dots, n\}$, sostituendo nell'ultima si ha $1 = \sum_{i=1}^n (2\lambda)^{-2} = n(2\lambda)^{-2}$ da cui segue $v_i = \pm n^{-\frac{1}{2}}$. Poichè l'insieme $V = \{v \in \mathbb{R}^n : g(v) = 0\}$ è chiuso e limitato, è compatto. Ne segue che f, essendo continua, deve avere su V un massimo ed un minimo che devono quindi essere punti stazionari. Il massimo di f deve dunque verificarsi per $v_i = n^{-\frac{1}{2}}$.

6. Un calcolo diretto mostra che la forma è chiusa. Per vedere se è esatta basta calcolare l'integrale su una curva chiusa contente l'origine. La cosa più semplice è una circonferenza γ_r di raggio r e centro l'origine: $\gamma_r(\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$ e

$$
\int_{\gamma_r} \omega = -\int_0^{2\pi} (\sin^2\theta + \cos^2\theta) d\theta = -2\pi \neq 0.
$$

Dunque la forma non è esatta.

Commenti

Nell'esercizio (2) moltissimi hanno argomentato che f è una funzione la cui derivata tende a zero quando $x \to \infty$ e quindi deve avere un asintoto orizzontale, dunque il limite esiste. Questo argomento è senza senso e mostra una totale mancanza di comprensione della materia: provate ad applicarlo a $f(x) = \ln x$ o $f(x) = \sqrt{1+x}$ o altra roba del genere. Durante la maggior parte del corso ho cercato di spiegare che quando si tratta con "infinito" bisogna essere molto cauti e i ragionamenti intuitivi sono spesso errati. È triste constatare che le mie parole sono cadute nel vuoto per così tante persone.

Nell'esercizio (3) molti hanno avuto l'idea (giusta) di integrare per parti, ma pochissimi hanno fatto il conto correttamente. Di solito gli estremi di integrazione sono misteriosamente spariti per mai più riapparire! La mia impressione è che molti si sono fatti impressionare/spaventare dalla presenza di n. Ma n è semplicemente un numero, che male vi ha fatto?

Nell'esercizio (6) molti hanno integrato rocambolescamente la forma (di solito senza spiegare quale era il percorso di integrazione e quindi scrivendo cose vaghe e tendenziose) giungendo alla conclusione che $\arctan\frac{x}{y}$ è una primitiva. Nessuna di queste persone sembra essersi preoccupata del fatto che tale funzione non è definita per $y = 0$. Ovviamente, poichè la forma è chiusa, ammette una primitiva (o potenziale) su qualunque dominio stellato (o, più in generale, semplicemente connesso o, detto vagamente, senza buchi), cosa che però $\mathbb{R}^2 \backslash \{0\}$ non è. Di nuovo la faccenda è sottile e se uno ragiona con l'accetta rischia di farsi cadere l'albero in testa.