Calcolo I (Fisica)

Esame 10/02/2017

Cognome........................ Nome.........................

Avete 3:00 ore di tempo. Ogni esercizio vale 5 punti. Solo le **risposte chiaramente giustificate** saranno prese in considerazione. Le parti degli elaborati scritte in maniera **disordinata** o **incomprensibile** saranno **ignorate**.

1. Risolvere l'equazione nel campo complesso
$$z^3 = \frac{(1+i)^4}{(1-i)^2}.$$

2. Si calcolino i limiti
$$\lim_{n\to\infty}\left[n - 2n^3\left(1-\cos\frac{1}{n}\right)\right] \quad , \quad \lim_{x\to 0^+}\frac{\tan(\sqrt{x}) - \sqrt{x(1+\frac{2x}{3})}}{(\sqrt{x}+x\log x)^5}.$$

3. Si studi la continuità della funzione $f(x,y)$ sotto definita e delle sue derivate parziali rispetto a x e y
$$f(x,y) = \begin{cases} xy^2\cos\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

4. Si calcoli l'integrale
$$\int_0^\infty \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+1}}.$$

5. Studiare convergenza semplice e assoluta, al variare di x, della serie
$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(x+1)^n}{n2^n}.$$

6. Si consideri la funzione
$$f(x) = (x-2)e^{(2-x)(x-1)}$$
Se ne studi il grafico, indicando, in particolare: dominio, eventuali asintoti, punti di massimo e minimo relativo, intervalli di crescenza e decrescenza.

SOLUZIONE

1. Si noti che

$$1+i=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}},\quad 1-i=\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}\Rightarrow w:=\frac{(1+i)^4}{(1-i)^2}=2e^{i\frac{3\pi}{2}}=2e^{-i\frac{\pi}{2}}$$

   Ne segue che le 3 soluzioni distinte dell'equazione $z^3=w$ sono date da

$$z_k=2^{\frac{1}{3}}e^{i(-\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi k}{3})},\quad k=0,1,2$$

   In coordinate cartesiane

$$z_0=2^{-\frac{2}{3}}(\sqrt{3}-i),\quad z_1=2^{-\frac{2}{3}}(-\sqrt{3}-i),\quad z_2=2^{\frac{1}{3}}i$$

2. Si calcolino i limiti

$$\lim_{n\to\infty}\left[n-2n^3\left(1-\cos\frac{1}{n}\right)\right]=\lim_{n\to\infty}\left[n-2n^3\left(\frac{1}{2n^2}+\mathcal{O}(n^{-4})\right)\right]=0.$$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0^+}\frac{\tan(\sqrt{x})-\sqrt{x(1+\frac{2x}{3})}}{(\sqrt{x}+x\log x)^5}&=\lim_{x\to0^+}\frac{x^{\frac{1}{2}}+\frac{x^{\frac{3}{2}}}{3}+\frac{2}{15}x^{\frac{5}{2}}-x^{\frac{1}{2}}\left(1+\frac{x}{3}-\frac{1}{18}x^2\right)+\mathcal{O}(x^3)}{x^{\frac{5}{2}}(1+o(1))}\\&=\frac{2}{15}+\frac{1}{18}.\end{aligned}$$

3. La funzione $f(x,y)$ è ovviamente continua e differenziabile in tutti i punti diversi da $(0,0)$; rimane dunque da studiare solo il comportamento in tale punto. Poiché $|xy^2|\leqslant(x^2+y^2)^{3/2}$ e $|\cos((x^2+y^2)^{-1/2})|\leqslant1$, si ha che $|f(x,y)|\leqslant(x^2+y^2)^{3/2}$, dunque $\lim_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=0$, quindi $f(x,y)$ è continua anche in $(0,0)$. D'altro canto per $(x,y)\neq(0,0)$ le derivate parziali si possono calcolare con le solite regole ottenendo

$$\begin{aligned}\partial_x f(x,y)&=y^2\cos\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)+x^2y^2(x^2+y^2)^{-\frac{3}{2}}\sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)\\\partial_y f(x,y)&=2xy\cos\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)+xy^3(x^2+y^2)^{-\frac{3}{2}}\sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)\end{aligned}$$

   che sono chiaramente continue in $\mathbb{R}^2\backslash\{0\}$, mentre le derivate parziali in $(0,0)$ si debbono calcolare come il limite del rapporto incrementale, ovvero

$$\partial_x f(0,0)=\lim_{h\to0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=0\ ;\quad\partial_y f(0,0)=\lim_{h\to0}\frac{f(0,h)-f(0,0)}{h}=0.$$

   A questo punto basta notare che, con un argomento simile al precedente, si può provare che

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\partial_x f(x,y)=0=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\partial_y f(x,y)$$

   per concludere che le derivate sono continue anche in $(0,0)$.

4. Questo esercizio si può fare in vari modi, qui ne discutiamo due:

(a) Si consideri la sostituzione $x^2 + 1 = (z - x)^2$. Un semplice calcolo mostra che

$$x = \frac{z^2 - 1}{2z} = \varphi(z).$$

Dunque $x \in [0, \infty]$ corrisponde a $z \in [1, \infty]$ e, in tale intervallo, $\varphi' \geqslant 0$, ovvero φ è crescente e differenziabile, quindi un buon cambio di coordinate. Si noti che in questo intervallo $z - x \geqslant 0$. Inoltre

$$\varphi'(z) = \frac{z^2 + 1}{2z^2}.$$

Dunque[1]

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+1}} &= \int_1^\infty \frac{2}{z^2 + 2z - 1} dz = \int_1^\infty \frac{2}{(z + 1 + \sqrt{2})(z + 1 - \sqrt{2})} dz \\ &= \lim_{L\to\infty} \frac{1}{\sqrt{2}} \int_2^L \frac{1}{(u - \sqrt{2})} - \frac{1}{(u + \sqrt{2})} du \\ &= \lim_{L\to\infty} \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\ln \frac{2 + \sqrt{2}}{2 - \sqrt{2}} + \ln \frac{1 - L^{-1}\sqrt{2}}{1 + L^{-1}\sqrt{2}} \right] = \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \frac{2 + \sqrt{2}}{2 - \sqrt{2}}.\end{aligned}$$

(b) Consideriamo la sostituzione $x = \sinh z$, cosicché $x^2 + 1 = (\cosh z)^2$. Dunque,[2]

$$\int_0^\infty \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+1}} = \int_0^\infty \frac{1}{\sinh z + 1} dz = \int_0^\infty \frac{2e^z}{e^{2z} + 2e^z - 1} dz = \int_1^\infty \frac{2}{w^2 + 2w - 1} dw.$$

A questo punto possiamo continuare come nel caso precedente.

5. **Questo esercizio conteneva un errore tipografico: la serie deve chiaramente partire da 1, visto che il termine $n = 0$ non è propriamente definito.** Applichiamo il criterio del rapporto (quello della radice si applica similmente):

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|x+1|^{n+1} 2^n n}{|x+1|^n (n+1) 2^{n+1}} = |x+1| \lim_{n\to\infty} \frac{n}{(n+1)2} = \frac{|x+1|}{2}.$$

Dunque la serie converge assolutamente se $|x + 1|/2 < 1$, ovvero $x \in (-3, 1)$, mentre non converge nel complemento di $[-3, 1]$. Rimangono da analizzare gli estremi dell'intervallo in cui il criterio del rapporto non fornisce alcuna indicazione. Se $x = -3$ allora si ha

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(-3+1)^n}{n 2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

ovvero la serie armonica che notoriamente non converge. Invece per $x = 1$ si ha

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$$

ovvero la serie armonica a segni alterni che converge (ma non converge assolutamente) per il criterio di Leibniz.

6. La funzione è definita ovunque, si annulla solo per $x = 2$, è negativa per $x < 2$ e positiva per $x > 2$. Inoltre $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$, per cui l'asse x è un asintoto orizzontale. Un calcolo diretto mostra che

$$f'(x) = -e^{(2-x)(x-1)} \left(2x^2 - 7x + 5\right)$$

che si annulla per $x \in \{1, \frac{5}{2}\}$, è positiva per $x \in (1, \frac{5}{2})$ ed è negativa altrove. Ne segue immediatamente che la funzione ha un minimo (negativo) in $x = 1$ e un massimo (positivo) in $x = \frac{5}{2}$.

[1] Nella seconda riga si è posto $u = z + 1$.

[2] Nell'ultima uguaglianza abbiamo usato la sostituzione $w = e^z$.

Commenti

Alcuni errori mi risultano veramente incomprensibili:

- Nell'esercizio 2 molti dicono che $\lim_{n\to\infty} n^2(1-\cos 1/n) = 1/2$ e da li concludono. Ma il coseno è moltiplicato per n^3 mica n^2, se ragionate così avete una forma indeterminata tipo $\infty - \infty$ e non potete concludere nulla! Questo è un errore **assai grave**: per tutto il corso ho insistito che occorre essere cauti nel trattare i limiti e che non si possono fare operazioni algebriche con l'infinito. Un errore del genere mostra che tutte le mie parole sono cadute nel vuoto e mi rattrista assai.

- Nell'esercizio 3 moltissimi hanno detto le cose più stranpalate. Onestamente non capisco la difficoltà: per controllare se una funzione è continua basta controllare che il limite coincida col valore della funzione del punto. Cosa c'è di difficile in ciò? Ovviamente, nel caso della derivata bisogna prima calcolarsela e, ovviamente, il calcolo è diverso se siamo in $(0,0)$ o altrove. Alcuni hanno addirittura scritto che la funzione è discontinua perchè è definita *a pezzi*. Non ci sono parole per descrivere l'orrore che tale affermazione mi suscita.

- Nell'esercizio 5 moltissimi applicano la radice o il rapporto e si dimenticano di mettere il valore assoluto. Questo significa essere veramente approssimativi, stiamo facendo della matematica non chiacchiere da bar. Cosa ancora più assurda alcuni scrivono correttamente la condizione $|x+1| < 2$ e da li concludono $|x| < 1$. Quando stavo alle medie la mia insegnate mi avrebbe preso a calci per un errore del genere! (e avrebbe fatto bene). Nello stesso esercizio poi nessuno si è accorto dell'errore tipografico che avevo fatto. Ma li leggete i testi oppure vi limitate ad immaginarvi quello che potrebbero dire?