Calcolo I (Fisica)

Esame 07/07/2017

Cognome......................... Nome.........................

Avete 3:00 ore di tempo. Ogni esercizio vale 5 punti. Solo le **risposte chiaramente giustificate** saranno prese in considerazione. Le parti degli elaborati scritte in maniera **disordinata** o **incomprensibile** saranno **ignorate**.

1. Si calcoli il limite
$$\lim_{\varepsilon\to 0} \varepsilon \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \frac{\cos x}{x^2+\varepsilon^2}dx.$$

2. Si calcolino i limiti
$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\ln n}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k} \quad , \quad \lim_{x\to\infty}\frac{\ln(x+\sqrt{x})}{\ln(x+33)}.$$

3. Dati $\{p_1,\dots,p_n\} \subset (0,1)$ si trovi il massimo della funzione
$$h_n(p_1,\dots,p_n) = -\sum_{i=1}^{n} p_i \ln p_i$$
sotto il vincolo $\sum_{i=1}^n p_i = 1$.

4. Data la forma differenziale $\omega = \arctan y dx + \frac{x}{1+y^2}dy$ e la curva $\gamma(t) = (1+\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$, $t \in [0,1]$, si calcoli
$$\int_\gamma \omega.$$

5. Per ogni $n \in \mathbb{N}$ si consideri l'insieme $\mathcal{Z}_n = \{\xi \in \mathbb{C} \ : \ \xi^n = 1\}$. Si mostri che $\mathcal{Z}_n$ è un gruppo rispetto alla moltiplicazione.

6. Si consideri la funzione
$$f(x) = \frac{x^2-1}{x^3-3x+1}$$
Se ne studi il grafico, indicando, in particolare: dominio, eventuali asintoti, punti di massimo e minimo relativo, intervalli di crescenza e decrescenza.

SOLUZIONE

1. Cambiando variabile si ha

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \varepsilon \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \frac{\cos x}{x^2+\varepsilon^2} dx = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{-1}^{1} \frac{\cos \varepsilon x}{x^2+1} dx$$
$$= \int_{-1}^{1} \frac{1}{x^2+1} dx = 2\arctan 1,$$

dove, nella seconda riga, abbiamo portato il limite dentro l'integrale poichè la successione di funzioni $f_\varepsilon(x) = \cos \varepsilon x (1+x^2)^{-1}$ tende uniformemente a $(1+x^2)^{-1}$ nell'intervallo $[-1,1]$. In alternativa, si noti che $\cos x = 1 + \mathcal{O}(x^2)$, da cui

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \varepsilon \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \frac{1+\mathcal{O}(\varepsilon^2)}{x^2+\varepsilon^2} dx = \lim_{\varepsilon\to 0} \varepsilon^{-1} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \frac{1+\mathcal{O}(\varepsilon^2)}{(x/\varepsilon)^2+1} dx$$
$$= \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{-1}^{1} \frac{1+\mathcal{O}(\varepsilon^2)}{x^2+1} dx = 2\arctan 1.$$

2. Si noti che

$$\ln n = \int_1^n \frac{1}{x} dx = \sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} \frac{1}{x} dx = \sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} \left[\frac{1}{k} - \frac{x-k}{\xi_k^2}\right] dx$$

dove nell'ultima uguaglianza abbiamo usato la formula di lagrange e $\xi_k \in [k, k+1]$. Ne segue che

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} - \frac{1}{k^2} \leqslant \ln n \leqslant \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}.$$

Poichè $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} < \infty$, per il confronto, segue

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\ln n} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} = 1.$$

D'altro canto:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x+\sqrt{x})}{\ln(x+33)} = \lim_{x\to\infty} \frac{\ln x + \ln(1+1/\sqrt{x})}{\ln x + \ln(1+33/x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{1+\frac{\ln(1+1/\sqrt{x})}{\ln x}}{1+\frac{\ln(1+33/x)}{\ln x}} = 1.$$

In alternativa, si può usare l' Hopital.

3. Usiamo i moltiplicatori di Lagrange e cerchiamo il massimo della funzione

$$F(p_1,\ldots,p_n,\lambda) = -\sum_{i=1}^n p_i \ln p_i + \lambda \left(1 - \sum_{i=1}^n p_i\right),$$

il cui dominio di definizione è $p_i \geqslant 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Uguagliando il gradiente di F a zero si ottiene

$$-\ln p_i - 1 - \lambda = 0$$
$$1 - \sum_{i=1}^n p_i = 0.$$

Dalle prime n equazioni si ottiene $p_i = p_j$, per ogni $i, j \in \{0,\ldots,n\}$, e dall'ultima segue $p_i = \frac{1}{n}$. Per controllare che questo sia veramente un massimo occorre studiare la funzione sul bordo dell'insieme di definizione. Se, per esempio, $p_n = 0$, allora si ha $h_n(p_1, \ldots, p_{n-1}, 0) = h_{n-1}(p_1, \ldots, p_{n-1})$. Possiamo quindi procedere per induzione: assumiamo che il massimo della h_k, per $k < n$, sia $\ln k$ che si ha per $p_i = \frac{1}{k}$, allora il valore massimo di h_n sul bordo è $\ln(n-1)$ che è inferiore a $\ln n$. Per verificare l'induzione basta quindi controllare il caso $n = 1$. In tal caso deve essere $p_1 = 1$ e quindi $h_1(p_1) = 0 = \ln 1$.

4. La forma è chiusa e definita su tutto $\mathbb{R}^2$, quindi esatta e perciò l'integrale è nullo.

5. Dobbiamo verificare le varie proprietà. Chiusura rispetto al prodotto: se $\xi, \eta \in \mathcal{Z}_n$ allora $(\xi\eta)^n = \xi^n \eta^n = 1 \cdot 1 = 1$, dunque $\xi\eta \in \mathcal{Z}_n$. Elemento neutro: $1^n = 1$, dunque $1 \in \mathcal{Z}_n$. Inverso: se $\xi \in \mathcal{Z}_n$, allora $\xi \neq 0$, visto che $0^n = 0 \neq 1$, dunque $(\xi^{-1})^n = (\xi^n)^{-1} = 1^{-1} = 1$, ovvero $\xi^{-1} \in \mathcal{Z}_n$. Proprietà associativa: segue banalmente dalla proprietà associativa del prodotto e dalla chiusura rispetto alla moltiplicazione. Dunque $\mathcal{Z}_n$ è un gruppo.

   Qualcuno (me incluso) potrebbe essere scontento della dimostrazione di cui sopra a causa del fatto che non fornisce alcuna informazione su chi sia effettivamente il gruppo $\mathcal{Z}_n$. Un argomento più costruttivo è il seguente: se $\xi \in \mathcal{Z}_n$ allora $1 = |\xi^n| = |\xi|^n$, dunque $|\xi| = 1$ e quindi $\xi = e^{i\theta}$. Quindi $1 = \xi^n = e^{in\theta}$. Ne segue che $n\theta = 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, ovvero $\theta = 2\pi \frac{k}{n}$ mod 2π. Questo significa che $k \in \mathbb{Z}_n$, che è un gruppo additivo ed è chiaramente isomorfo a $\mathcal{Z}_n$.

6. Ovviamente f ha zero come asintoto orizzontale, inoltre per x grandi e negativi $f(x)$ è negativa mentre per x grandi e positivi $f(x)$ è positiva. Inoltre $f(-1) = f(1) = 0$. Un calcolo diretto mostra che
$$f'(x) = \frac{-x^4 + 2x - 3}{(x^3 - 3x + 1)^2}.$$
   Si noti che $g(x) = x^3 - 3x + 1$ è una cubica con massimo, positivo, in -1 e minimo, negativo, in 1. Ne segue che si annulla in tre punti $x_{-1} \in (-2, -1), x_0 \in (0, 1)$ e $x_1 \in (1, 2)$ come si può facilmente evincere visto che $g(-2) < 0$, $g(-1) > 0$, $g(0) > 0$, $g(1) < 0$ e $g(2) > 0$. Mentre $\varphi(x) = -x^4 + 2x - 3$ ha un solo massimo in $2^{-\frac{1}{3}}$ e poichè $\varphi(2^{-1/3}) < 0$ ne segue che $f'(x) < 0$. Dunque f ha tre asintoti verticali, due zeri, ed è sempre decrescente. Questo è più che sufficiente per tracciarne qualitativamente il grafico.

Commenti

Ho riscontrato in molti compiti una attitudine un poco odiosa: quella di scrivere cose approssimative ed imprecise (spesso basate su vaghe analogie). Dopo avere passato un semestre a cercare di spiegare la differenza tra un argomento rigoroso e le chiacchiere da bar, trovo questo fatto abbastanza frustante. Vi prego, nel futuro, quando scrivete qualcosa di domandarvi sempre: cosa significa esattamente?

Errori e procedimenti che trovo sorprendenti o deprecabili:

- Nell'esercizio 1 quasi nessuno si è preso la briga di fare il cambio di variabile $x = \varepsilon y$. Ma non vedete che per $|x| \leqslant \varepsilon$ il denominatore è dell'ordine di ε^2 e quindi per capirci qualcosa occorre rimuovere la dipendenza da ε nel denominatore?

- La prima parte del 2 è rimasta misteriosa ai più. Avendo passato più di una settimana spiegando come si stimano somme tipo $\sum_{k=1}^{n-1} f(k)$ e avendo insistito in particolare sul fatto che $\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} \sim \ln n$ sento questo fatto come un insulto personale.

- Nell'esercizio 3 nessuno, dico nessuno, ha notato che la funzione è definita solo per $p_i \geqslant 0$ e che quindi occorre preoccuparsi del bordo visto che il massimo potrebbe essere assunto sul bordo. Qui stiamo proprio alle basi del problema di trovare i massi e i minimi, roba che di sicuro vi è stata detta già alle superiori. Volete piantarla di pensare che la matematica sia solo l'applicazione automatica di regolette imbecilli e cominciare a usare la testa?

- Molti hanno notato che che forma ω nell'esercizio 4 è chiusa e il dominio è semplicemente connesso. Bene. Però a questo punto passano a cercare di calcolare l'integrale. Ma tale forma è esatta e quindi il suo integrale su una curva chiusa è zero. Che ne devo dedurre? Che non avete nemmeno letto i titoli dei capitoli del libro?

- Qui sono rimasto basito. Quasi tutti dicono quali proprietà deve soddisfare un gruppo (mi fa molto piacere che lo sappiate, ma questo è argomento del corso di algebra) e li si fermano. Oppure fanno cose demenziali come controllare la proprietà associativa della moltiplicazione usando la proprietà associativa della moltiplicazione. Quasi nessuno si rende conto che il punto fondamentale è verificare che l'insieme delle radici è chiuso rispetto alla moltiplicazione. Questo esercizio era sul nulla, il suo scopo era solo di controllare se siete in grado di comprendere una domanda. Il risultato è piuttosto scoraggiante.

- La maggioranza ha avuto attacchi di panico perchè non si potevano calcolare esplicitamente gli zeri del denominatore. E allora? Una volta che sapete esattamente chi sono gli zeri che ci fate? In quale modo siete messi meglio che sapendo semplicemente che sono tre, uno negativo e due positivi, di cui uno minore di uno? In generale calcolare le soluzioni di una equazione è una cosa complicata, uno cerca di farlo solo se serve a qualcosa, altrimenti ci sono cose più interessanti (o più impellenti) da fare nella vita.