Calcolo I (Fisica)

Esame 26/07/2017

Cognome........................ Nome........................

Avete 3:00 ore di tempo. Ogni esercizio vale 5 punti. Solo le **risposte chiaramente giustificate** saranno prese in considerazione. Le parti degli elaborati scritte in maniera **disordinata** o **incomprensibile** saranno **ignorate**.

1. Per ogni $a_0 \in \mathbb{R}$ si consideri la successione definita ricorsivamente dalla relazione
$$a_{n+1} = \frac{1}{2} \sin a_n$$
si calcoli
$$\lim_{n\to\infty} a_n.$$
Si dica se esiste il limite
$$\lim_{n\to\infty} 2^n a_n.$$

2. Mostrare che il limite
$$\lim_{x\to+\infty} \int_1^x e^{-y^2} dy$$
esiste ed appartiene all'intervallo $[e^{-4}, 1]$.

3. Data la funzione
$$f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} - 1 - x$$
si tracci il grafico allo scopo di determinare il numero delle soluzioni dell'equazione $f(x) = 0$.

4. Si studi la continuità della seguente funzione $f(x, y)$ e delle sue derivate parziali rispetto a x e y
$$f(x,y) = \begin{cases} x^2 y \sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) & se \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & se \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

5. Si calcoli la lunghezza della curva $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;:\; x \in [-1, 1], y = x^2\}$.

6. Si studi la convergenza delle serie
$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n \cos \pi n \;; \quad \sum_{n=0}^{\infty} (-x)^n \cos \pi n.$$

SOLUZIONE

1. Si noti che, per ogni $a_0 \in \mathbb{R}$, $a_n \in [-1/2, 1/2]$ per ogni $n \geqslant 1$. Inoltre $|\sin x| \leqslant |x|$, e per $x \in [-1/2, 1/2]$ si ha $|\sin x| = |x|$. Dunque, per ogni $n > 0$,
$$0 \leqslant |a_{n+1}| \leqslant \frac{1}{2}|a_n| \leqslant |a_n|. \tag{1}$$
Ne segue che $|a_n|$ è una successione monotona decrescente inferiormente limitata e quindi ha limite. Detto ℓ il limite, si ha
$$\ell = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\sin a_n = \frac{1}{2}\sin \ell.$$
che ha $\ell = 0$ come unica soluzione. Dunque
$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$
D'altro canto da (1), per induzione, si ha
$$|a_n| \leqslant 2^{-n}|a_0|.$$
Da cui segue immediatamente, di nuovo, $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Per studiare l'altro limite si ponga $b_n = |2^n a_n|$. Allora
$$0 \leqslant b_{n+1} = 2^n|\sin a_n| \leqslant 2^n|a_n| = b_n.$$
Dunque b_n è una successione monotona decrescente ed inferiormente limitata, perciò ammette limite.
È tuttavia interessante notare che il limite dipende dal punto iniziale. Infatti, se, per esempio, $a_0 = 10\pi$ si ha $b_1 = 0$ e quindi il limite è zero. Se $a_0 = 10.5\pi$ allora $b_1 = 1$. In tal caso, usando Taylor al terzo ordine e poichè $b_n \leqslant 1$,
$$b_{n+1} = 2^n\left|a_n - \frac{\sin \xi_n}{6}a_n^3\right| \geqslant b_n - \frac{1}{6\cdot 2^{2n}}b_n^3 \geqslant b_n - \frac{1}{6}2^{-2n},$$
dove $\xi_n \in [-1, 1]$. Ne segue, per induzione, che
$$1 \geqslant b_n \geqslant b_1 - \frac{1}{6}\sum_{k=1}^{n-1} 2^{-2k} \geqslant 1 - \frac{1}{6}\left[\sum_{k=0}^{\infty} 4^{-k} - 1\right] = 1 - \frac{1}{6}\left[\frac{1}{1-1/4} - 1\right] = \frac{17}{18}.$$

2. Basta dimostrare che l'integrale è uniformemente limitato in x a questo scopo si noti che, per $y \geqslant 1$, $y^2 \geqslant y$, dunque
$$\int_1^x e^{-y^2}dy \leqslant \int_1^x e^{-y}dy = e^{-1} < 1.$$
D'altra parte
$$\int_1^x e^{-y^2}dy \geqslant \int_1^2 e^{-4}dy = e^{-4}.$$

3. Si noti che $f(0) = 0$, inoltre $f'(x) = 1/2(e^x - e^{-x}) - 1$, dunque $f'(x) = 0$ se
$$e^{2x} - 2e^x - 1 = 0.$$
Ponendo $u = e^x$ si ha l'equazione quadratica $u^2 - 2u - 1 = 0$ che ha soluzioni $u = 1 \pm \sqrt{2}$. Siccome $e^x > 0$, l'unica soluzione è $x = \ln(1 + \sqrt{2})$. D'altro canto si può verifcare che $f(1) < 0 < f(2)$. Dunque, per il teorema degli zeri di una funzione continua, si ha che la f ha uno zero nell'intervallo $(1, 2)$.[1] Dunque l'equazione ha esattamente due zeri.

[1] In tale intervallo la funzione ha esattamente uno zero visto che è monotona.

4. La funzione è ovviamente continua e differenziabile in tutti i punti diversi da $(0,0)$; rimane dunque da studiare solo il comportamento in tale punto. Poichè $|x^2y| \leqslant (x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}$ e $|\sin(1/\sqrt{x^2+y^2})| \leqslant 1$, si ha che $|f(x,y)| \leqslant (x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}$; dunque $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$. Quindi la funzione è continua.

   Daltro canto, per $(x,y) \neq (0,0)$, le derivate parziali si possono calcolare con le solite regole ottenendo
$$\partial_x f(x,y) = 2xy\sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) + x^2y(-x)(x^2+y^2)^{-\frac{3}{2}}\cos\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$$
$$\partial_y f(x,y) = x^2\sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) + x^2y(-y)(x^2+y^2)^{-\frac{3}{2}}\cos\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right).$$
   Mentre le derivate parziali in $(0,0)$ si debbono calcolare come il limite del rapporto incrementale, ovvero
$$\partial_x f(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = 0; \quad \partial_y f(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(0,h)-f(0,0)}{h} = 0.$$
   A questo punto basta notare che $|\partial_x f(x,y)| \leqslant 2|xy| + |x^3y|(x^2+y^2)^{-\frac{3}{2}} \leqslant 2(x^2+y^2) + \sqrt{x^2+y^2}$, per concludere che $\partial_x f$ è continua in $(0,0)$. Un simile argomento si applica a $\partial_y f$.

   In alternativa, i limiti precedenti si possono calcolare usando le coordinate polari $(x,y) = \rho(\cos\theta,\sin\theta)$ e studiando il limite $\rho \to 0$.

5. Dobbiamo calcolare la lunghezza L della curva $\gamma(x) = (x,x^2)$, dunque l'integrale
$$L = \int_{-1}^{1}\|\gamma'(x)\|dx = 2\int_0^1\sqrt{1+4x^2}dx.$$
   Questo si può fare in vari modi, ad esempio con la sostituzione $1+4x^2 = (z-2x)^2$, ovvero $x = \frac{z^2-1}{4z}$. Usando tale sostituzione si ha
$$\begin{aligned} L &= 2\int_0^1\sqrt{1+4x^2}dx = 2\int_1^{2+\sqrt{5}}\frac{z^2+1}{2z}\frac{z^2+1}{4z^2}dz = \frac{1}{8}\int_1^{\sqrt{2+\sqrt{5}}}\frac{(1+u)^2}{u^2}du \\ &= \frac{1}{8}\int_1^{\sqrt{2+\sqrt{5}}}\left(\frac{1}{u^2}+\frac{2}{u}+1\right)du \end{aligned}$$
   che si integra facilmente. Un'altra possibilità è la sostituzione $2x = \sinh u$, da cui, ponendo $a = \sinh^{-1}(2)$,
$$L = \int_0^{\sinh^{-1}(2)}(\cosh u)^2du = \frac{1}{4}\int_0^a e^{2u}+2+e^{-2u} = \frac{1}{8}(e^{2a}-e^{-2a})+\frac{1}{2}a.$$

6. Bata notare che $\cos\pi n = (-1)^n$ per ricondursi alla serie geometrica (per lo studio della convergenza assoluta). Per $|x| = 1$ le serie non convergono mai perchè il termine n-esimo non va a zero e quindi non è soddisfatto il criterio necessario per la convergenza.

Commenti

- Nell'esercizio 2 molti hanno usato il valore dell'integrale da 0 a ∞, da dove salta fuori? Se me lo dimostrate lo accetto altrimenti no. È come se diceste “ho sentito dire che la soluzione dell'esercizio è ...”, ovviamente questo lo conto zero.

- Nel 6 ho visto le cose più strampalate: criterio del rapporto, della radice ... ma se studiate la convergenza assoluta avete esattamente la serie geometrica, tutti questi criteri sono basati sul confronto con la serie geometrica, se avete la serie geometrica che criterio volete usare? Sapete esattamente quanto vale la serie. Poi quasi nessuno ha discusso correttamente il caso $|x| = 1$. Questo mi ha adombrato non poco: se uno da un esercizio totalmente banale si aspetta che sia risolto in maniera impeccabile non arraffazzonata ed inesatta.