Calcolo I (Fisica)

Esame 1/09/2017

Cognome........................ Nome........................

Avete 3:00 ore di tempo. Ogni esercizio vale 5 punti. Solo le **risposte chiaramente giustificate** saranno prese in considerazione. Le parti degli elaborati scritte in maniera **disordinata** o **incomprensibile** saranno **ignorate**.

1. Si studi la convergenza del limite
$$\lim_{x\to\infty}\int_1^x \frac{\sin y}{y}dy.$$

2. Data la funzione
$$f(x) := x + \cos(2\pi x)$$
si usi lo studio del grafico per trovare il numero di soluzioni dell'equazione $f(x) = 0$.

3. Ricordando il significato di produttoria ($\prod_{k=1}^n a_k = a_1 \cdot a_2 \cdots a_n$) si studi la convergenza del limite
$$\lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^n \left(1+\frac{1}{k^2}\right)^s$$
al variare di $s \in \mathbb{R}$. (Suggerimento: si usi il logaritmo).

4. Tra tutti i parallelepipedi di lati $x, y, z \geqslant 0$ tali che $x + y + z = 3$, si trovi quello di volume maggiore.

5. Data l'equazione $x + \varepsilon x^5 - 1 = 0$, si mostri che esiste $\varepsilon_0 > 0$ e una funzione differenziabile $X : (-\varepsilon_0, \varepsilon_0) \to \mathbb{R}$ tale che, per ogni $\varepsilon \in (-\varepsilon_0, \varepsilon_0)$, $x = X(\varepsilon)$ risolve l'equazione. Inoltre si mostri che si può estendere il dominio di X all'intervallo $(0, 1)$.

6. Data la funzione complessa $f(z) = z^2$, e i due domini $D = \mathbb{C}\backslash\{iy \in \mathbb{C} \ : \ y < 0\}$ e $R = \{x + iy \in \mathbb{C} \ : \ x > 0\}$, si mostri che esiste una funzione $\varphi : D \to \mathbb{C}$ tale che $f \circ \varphi(z) = z$ per ogni $z \in D$ e $z = \varphi \circ f(z)$ per ogni $z \in R$.

SOLUZIONE

1. Integrando per parti si ha
$$\int_1^x \frac{\sin y}{y} dy = \cos 1 - \frac{\cos x}{x} - \int_1^x \frac{\cos y}{y^2} dy.$$
Da cui la convergenza segue immediatamente. Se trovate l'argomento sopra un poco opaco, eccone uno che fa vedere che succede, ma più complicato: sia $n \in \mathbb{N}$ tale che $2\pi n + \pi \leqslant x \leqslant 2\pi(n+1) + \pi$, allora
$$\left| \int_1^x \frac{\sin y}{y} dy - \sum_{k=0}^{n-1} \int_{2k\pi+\pi}^{2(k+1)\pi+\pi} \frac{\sin y}{y} dy \right| \leqslant \text{constante}$$
D'altro canto
$$\int_{2k\pi+\pi}^{2(k+1)\pi+\pi} \frac{\sin y}{y} dy = \int_{2k\pi+\pi}^{2(k+1)\pi+\pi} \frac{\sin y}{2k\pi + \pi} dy + \mathcal{O}(\frac{1}{2k^2\pi}) = \mathcal{O}(\frac{1}{2k^2\pi}),$$
e abbiamo così confrontato l'integrale con una serie convergente.

2. Prima di tutto si noti che $f(0) = 1$. Inoltre $f(x) \geqslant 0$ per ogni $x > 1$ e $f(x) < 0$ per ogni $x < -1$. Poi $f'(0) = 1 - 2\pi \sin(2\pi x)$. Dunque f' ha uno zero in ogni intervallo $(n, n + 1/4)$ e $(n + 1/4, n + 1/2)$, $n \in \mathbb{Z}$. Poichè $f'(0) = 1$, ne segue che la funzione ha un massimo positivo per un qualche $x_0 \in (0, 1/4)$. D'altro canto $f(1/2) = -1/2$, dunque la funzione ha un minimo negativo per un qualche $y_0 \in (1/4, 1/2)$. Inoltre $f(3/4) = 3/4$, dunque (per il teorema sugli zeri di una funzione continua e la monotonia della funzione negli intervalli dati) esistono solo due zeri positivi: uno nell'intervallo $(1/4, 1/2)$ e uno nell'intervallo $(1/2, 3/4)$. D'altro canto $f(-1/2) = -3/2$, dunque la funzione ha un minimo negativo $y_{-1} \in (-3/4, -1/2)$. Finalmente $f(-1) = 0$, dunque la funzione ha un massimo positivo $x_{-1} \in (-1, -3/4)$. Ne segue che esistono solo tre zeri negativi, uno nell'intervallo $(-1/4, 0)$, uno nell'intervallo $(-1, -3/4)$ e -1. In conclusione l'equazione $f(x) = 0$ ha cinque soluzioni.

3. Si noti che
$$\prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{1}{k^2}\right)^s = e^{s \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{1}{k^2}\right)}.$$
Inoltre, usando Taylor al primo ordine
$$\left| \ln\left(1 + \frac{1}{k^2}\right) \right| \leqslant \frac{1}{k^2}.$$
Da cui segue che la serie all'esponente converge per il criterio del confronto e quindi il limite esiste per la continuità dell'esponenziale.

4. Usando i moltiplicatori di Lagrange dobbiamo, per prima cosa, trovare i punti stazionari della funzione $f(x, y, z, \lambda) = xyz + \lambda(x + y + z - 3)$ con dominio $x, y, z > 0$. Ovvero dobbiamo risolvere l'equazione
$$\begin{aligned} yz + \lambda &= 0 \\ xz + \lambda &= 0 \\ xy + \lambda &= 0 \\ x + y + z - 3 &= 0. \end{aligned}$$

Sottraendo la prima dalla seconda e la seconda dalla terza, si ha immediatamente $x = y = z$. Da cui, usando la quarta $x = y = z = 1$. Finalmente si noti che sul bordo del dominio il volume è nullo e quindi il massimo si deve trovare all'interno. In conclusione, il parallelepipedo con volume massimo è il cubo.

5. Si consideri la funzione $f(x, \varepsilon) = x + \varepsilon x^5 - 1$. Per il teorema della funzione implicita in $(1, 0)$ segue la prima parte dell'esercizio poichè $\partial_x f(1, 0) = 1 \neq 0$. Sia $(-\varepsilon_0, \varepsilon_0)$ l'intervallo in cui il Teorema della funzione implicita in $(1, 0)$ da una soluzione. In linea di principio ε_1 potrebbe essere molto piccolo, tuttavia il teorema della funzione implicita ci dice anche che
$$\partial_\varepsilon X(\varepsilon) = -\frac{\partial_\varepsilon f(X(\varepsilon), \varepsilon)}{\partial_x f(X(\varepsilon), \varepsilon)} = -\frac{X(\varepsilon)^5}{1 + 5\varepsilon X(\varepsilon)^4}.$$
Ne segue che la derivata è negativa e differente da zero a patto che $X(\varepsilon) > 0$. Si noti che finchè la derivata è diversa da zero è possibile applicare nuovamente il Teorema della funzione implicita per estendere l'intervallo di definizione. Inoltre la funzione è decrescente e quindi $X(\varepsilon) \in (0, 1]$. Sia ε_1 il massimo ε per cui $\inf_{\varepsilon \in (0, \varepsilon_1)} X(\varepsilon) \geqslant 0$, allora
$$X(\varepsilon_1) = 1 + \int_0^{\varepsilon_1} \partial_\varepsilon X(\varepsilon) d\varepsilon \geqslant 1 - \int_0^{\varepsilon_1} X(\varepsilon)^5 d\varepsilon \geqslant 1 - \varepsilon_1,$$
ne seque che $\varepsilon_1 \geqslant 1$.

6. Ponendo $z = \rho e^{i\theta}$, $\theta \in (-\pi, \pi)$ si ha $z \in R$. Si ponga $\varphi(z) = \sqrt{\rho} e^{i\theta/2}$. È facile verificare che l'immagine $\varphi(D) = R$ e $f(R) = D$. Quindi le composizioni sono ben definite (questo è il punto essenziale dell'esercizio). Rimane un banale conto algebrico, per $z \in D$, $f(\varphi(z)) = f(\sqrt{\rho} e^{i\theta/2}) = z$, inoltre se $z \in R$, allora $\varphi(f(z)) = \varphi(z^2) = \varphi(\rho^2 e^{2\theta i}) = \rho e^{\theta i} = z$.

Commenti

- Per timore di essere offensivo non sto a commentare sugli errori fatti nel primo esercizio.
- Nel secondo nessuno ha trovato tutti gli zeri, io pensavo fosse un esercizio facile, bastava tracciare il grafico con cura!
- Nel quarto nessuno si preoccupa del bordo dove gli estremi non si possono trovare semplicemente studiando la derivata. Questo è un commento che ho gia fatto, quante volte lo devo fare? Il prossimo che fa questo errore invece di considerarlo un esercizio che non da punti **tolgo tre punti**.
- Mi ha profondamente rattristato vedere che nessuno sapeva dell'esistenza del teorema della funzione implicita. Immagino che pensiate si tratti di un inutile pezzo di teoria. Errore! È un utilissimo strumento che permette di fare i conti e **i fisici i conti li devono sapere fare**.
- Nessuno si è reso conto che il punto dell'esercizio 6 è che il quadrato non è una funzione invertibile e per definire una inversa occorre specificare con cura il dominio. Questo è un fatto super basilare, ignorarlo è male e vi procurerà un mucchio di guai.