ALGORITMO DI NEWTON

CARLANGELO LIVERANI

1. Il problema

Si consideri il problema di trovare le soluzioni dell'equazione

$$f(x) = 0$$

in un dato intervallo $[a, b]$. Si supponga che f sia derivabile due volte e che esista $M > 0$ tale che $\sup_{x \in [a,b]} |f''(x)| \leq M$. Inoltre si assuma che $f(a)f(b) < 0$, dunque esiste uno zero in (a, b) per il teorema degli zeri delle funzioni continue e $f'(x) \geq c > 0$ per ogni $x \in [a, b]$, dunque lo zero è unico.

2. L'idea

L'idea di Newton è di confondere la funzione con la tangente. Più precisamente, scegliamo un punto iniziale (per esempio $x_0 = \frac{a+b}{2}$) e consideriamo la tangente

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

questa intersecherà l'asse delle x nel punto

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}.$$

Se la tangente è veramente vicina alla funzione, allora ci dovremmo aspettare che x_1 sia più vicina allo zero di f di quanto non lo fosse x_0. In particolare, se per caso $f(x_0) = 0$ allora si ottiene $x_1 = x_0$.

Viene dunque naturale considerare l'algoritmo

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)},$$

per ogni $n \geq 0$.

3. Funziona?

Per vedere se l'idea funziona confrontiamo $f(x_n)$ con $f(x_{n+1})$.

$$\begin{aligned}
f(x_{n+1}) &= f(x_n) + f'(x_n)(x_{n+1} - x_n) + \frac{1}{2} f''(\xi)(x_{n+1} - x_n)^2 \\
&= f(x_n) - f'(x_n)\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} + \frac{1}{2} f''(\xi) \left(\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}\right)^2 \\
&= \frac{1}{2} f''(\xi) \left(\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}\right)^2
\end{aligned}$$

Dunque

$$|f(x_{n+1})| \leq \frac{M}{2c^2} |f(x_n)|^2.$$

Date: Rome, November 25, 2012.

Dunque, se $|f(x_0)| < \sigma \frac{2c^2}{M}$ per qualche $\sigma < 1$, ne seque, per induzione, che per ogni $n > 0$

$$|f(x_n)| \leq \left[\frac{M}{2c^2}\right]^{1+\cdots+2^{n-1}} |f(x_0)|^{2^n} < \sigma^{2^n}.$$

e dunque l'algoritmo di Netwon produce punti in cui la funzione ha valori sempre più piccoli. Inoltre se $f(x_0) \leq \sqrt{\frac{(a+b)c^2}{M}}$ si ha che $x_1 \in [a,b]$ e così per i punti successivi.

D'altro canto, detto $z \in (a,b)$ il misterioso punto in cui $f(z) = 0$ si ha

$$f(x_n) = f(z) + f'(\xi)(x_n - z) = f'(\xi)(x_n - z),$$

da cui seque

$$|x_n - z| \leq \frac{|f(x_n)|}{|f'(\xi)|} \leq \frac{|f(x_n)|}{c}.$$

Dunque x_n convege a z e la convergenza, una volta che $f(x_n)$ è sufficientemente piccolo, è estremamente rapida. Proviamo con $\sqrt{2}$, con $x_0 = 1$, allora poniamo $f(x) = x^2 - 2$ e la formula ricorsiva è

$$x_{n+1} = \frac{x_n}{2} + \frac{1}{x_n}.$$

Dunque, $x_1 = \frac{3}{2}$, $x_2 = \frac{17}{12}$, $x_3 = \frac{577}{408}$ che differisce da $\sqrt{2}$ per circa due milionesi (ovvero da le prime cinque cifre decimali esatte).

A questo punto verrebbe naturale cercare di usare questo algoritmo per calcolare e o π. Si vede rapidamente che non funziona molto bene in quanto in ambedue i casi occorre essere in grado con calcolare con grande precisione la funzione logaritmo o le funzioni trigonometriche. D'altro canto se esistesse una formula di ricorsione del tipo $x_{n+1} = g(x_n)$ dove g è una funzione razionale (ovvero quoziente di polinomi con coefficienti razionali) che converge, per esempio, a π, prendendo il limite per $n \to \infty$ si avrebbe $\pi = g(\pi)$ dunque π sarebbe la radice di un polinomio con coefficienti razionali. Questo è noto essere impossibile poichè sia e che π sono numeri *trascendenti*.[1]

Dipartimento di Matematica, Università di Roma (Tor Vergata), Via della Ricerca Scientifica, 00133 Roma, Italy, liverani@mat.uniroma2.it

[1] Un numero è trascendente se, appunto, non è la radice di un polinomio con coefficienti razionali.