Tutorato Calcolo 2
Simone La Cesa, 08/11/2017

1 Dato il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' = cos(y)e^{-(y+1)^2} \\ y(0) = \beta \end{cases}$$

[a] Si determini, al variare di $\beta \in \mathbb{R}$, se il problema ammette un'unica soluzione locale e globale e determina le soluzioni stazionarie.

[b] Si studi, al variare di $\beta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ la monotonia della soluzione e gli asintoti. Disegna la soluzione.

2 Dato il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' = \left(1 + \frac{1}{\sqrt{t+1}}\right) y\, arctan(y+2) \\ y(0) = \beta \end{cases}$$

[a] Si determini, al variare di $\beta \in \mathbb{R}$, se il problema ammette un'unica soluzione locale e globale e determina le soluzioni stazionarie.

[b] Si studi, al variare di β la monotonia della soluzione e gli asintoti. Disegna la soluzione.

3 Risolvere i seguenti sistemi di equazioni differenziali lineari:

[a]

$$\begin{cases} x' = 9x - 4y \\ y' = 8x - 3y \end{cases}$$

[b]

$$\begin{cases} x' = x + 3y \\ y' = -y + z \\ z' = -10y + 5z \end{cases}$$

[c]

$$\begin{cases} x' = -2x - \frac{1}{2}y & x(0) = 2 \\ y' = 2x - 2y & y(0) = 0 \end{cases}$$

[d]

$$\begin{cases} x' = x + 2y + e^{-t} \\ y' = 2x + y + 1 \end{cases}$$

4 Risolvi le seguenti equazioni differenziali di ordine $n >= 2$:

[a]

$$y'' - 3y' + 2y = 0$$

[b]

$$y''' + y'' + y' + y = 0$$

[c]

$$y''' + y'' - y' - y = 0$$

[d]

$$y'' + 3y' = (x^3 - 1)e^x$$

[e]

$$y''' + y' = cos(t) - 2e^{3t}$$

5 Determina tutte le possibili soluzioni delle *Equazioni di Eulero*:

$$t^2 x''(t) + \beta t x'(t) + \gamma x(t) = 0 \qquad \beta, \gamma \in \mathbb{R}$$

Risultati Numerici

3 [a]

$$\begin{cases} x(t) = c_1 e^t + c_2 e^{5t} \\ y(t) = 2c_1 e^t + c_2 e^{5t} \end{cases}$$

[b]

$$\begin{cases} x(t) = c_1 e^t + c_2 e^{2t} cos(t) + c_3 e^{2t} sin(t) \\ y(t) = (c_2 - c_3) e^{2t} cos(t) + (c_3 - c_2) e^{2t} sin(t) \\ z(t) = (c_2 - 4c_3) e^{2t} cos(t) + (2c_3 - 4c_2) e^{2t} sin(t) \end{cases}$$

[c]

$$\begin{cases} x(t) = 2e^{-2t}cos(t) \\ y(t) = 4e^{-2t}sin(t) \end{cases}$$

[d]

$$\begin{cases} x(t) = c_1e^{3t} + \left(-c_2 - \frac{1}{2} + \frac{t}{2}\right)e^{-t} - 1 \\ y(t) = c_1e^{3t} + \left(c_2 - \frac{t}{2}\right)e^{-t} - 1 \end{cases}$$

4

[a] y(t)=c$_1e^{2t} + c_2e^t$

[b] y(t)=c$_1e^{-t} + c_2cos(t) + c_3sin(t)$

[c] y(t)=(c$_1 + c_2t)e^{-t} + c_3e^t$

[d] y(t)=c$_1e^x + c_2e^{-3x} + e^x\left(\frac{1}{4}x^3 - \frac{15}{16}x^2 + \frac{63}{32}x - \frac{287}{128}\right)$

[e] y(t)=c$_1 + \left(c_2 - \frac{t}{2}\right)cos(t) + c_3sin(t) - \frac{1}{15}e^{3t}$