Tutorato Calcolo 2
Simone La Cesa, 29/11/2017

Esercizi su superfici e teoremi di Gauss, Divergenza e Rotore

1. Calcola l'integrale superficiale della funzione:

$$f(x,y,z) = \frac{y+1}{\sqrt{1+\frac{x^2}{4}+4y^2}} \tag{1}$$

su Σ, parte del paraboloide ellittico $z = -\frac{x^2}{4} - y^2$ situata al di sopra del piano $z = -1$.

2. Calcola l'area della calotta Σ, parte della superficie di equazione $z = \frac{y^2}{2}$, intercettata dal prisma (infinito) individuato dai piani di equazioni $x + y = 4$, $y - x = 4$ e $y = 0$.

3. Utilizzando il Teorema di Gauss/Green, calcolare al variare del parametro a, il lavoro compiuto dalla forza $\mathbf{f}(x,y) = x^2y^2\mathbf{i} + ax\mathbf{j}$ nello spostamento lungo l'arco chiuso Γ, percorso in senso antiorario, unione di Γ_1, Γ_2 e Γ_3, espressi in coordinate cartesiane rispettivamente come $x^2 + y^2 = 1$, $x = 1$ e $y = x^2 + 1$ $(x, y \geq 0)$.

4. Calcola, utilizzando il Teorema di Gauss Green, l'area dell'insieme:

$$\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1, \left(x - \frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2 + y^2 \geq \frac{1}{3}\} \tag{2}$$

5. Usando il Teorema della divergenza, determinare il flusso del campo:

$$\mathbf{f}(x,y,z) = (x^3 + yz)\mathbf{i} + (xz + y^3)\mathbf{j} + (xy + z^3 + 1)\mathbf{k} \tag{3}$$

uscente da Ω, definito dalle relazioni:

$$x^2 + y^2 + z^2 \leq 1,\ x^2 + y^2 - z^2 \leq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0. \tag{4}$$

6. Dato il campo vettoriale:

$$\mathbf{f}(x,y,z) = (y+z)\mathbf{i} + 2(x+z)\mathbf{j} + 3(x+y)\mathbf{k} \tag{5}$$

e la superficie sferica di equazione $x^2 + y^2 + z^2 = 2$, calcolare il flusso del rotore di $\mathbf{f}$ uscente dalla parte della superficie Σ che sta sopra il piano $z = y$.

7. Utilizzando il Teorema di Stokes, calcolare la circuitazione del campo:

$$\mathbf{f}(x,y,z) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + xy\mathbf{k} \tag{6}$$

lungo il bordo della superficie Σ, intersezione del cilindro $x^2+y^2=4$ e del paraboloide $z=\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}$, orientata in modo che il versore normale punti verso l'asse z.

Soluzioni numeriche

1. $I = 2\pi$
2. $A(\Sigma) = \frac{14}{3}\sqrt{17} + 4log(4+\sqrt{17}) + \frac{2}{3}$
3. $L = a\left(\frac{4}{3} - \frac{\pi}{4}\right) - \frac{26}{35}$
4. $A = \frac{13}{18}\pi + \frac{1}{\sqrt{3}}$
5. $F = \frac{3}{10}\pi(2-\sqrt{2})$
6. $F = 3\sqrt{2}\pi$
7. $C = \frac{10}{9}\pi$