Calcolo II

Esame del 9/02/2018

Cognome......................... Nome..........................

Avete 3:00 ore di tempo. Ogni esercizio vale 5 punti. Solo le **risposte chiaramente giustificate** saranno prese in considerazione. Le parti degli elaborati scritte in maniera **disordinata** o **incomprensibile** saranno **ignorate**.

1. Dato it sistema di equazioni differenziali

$$\begin{aligned} x' &= 2y - 2x^3 \\ y' &= -x - 3y^3, \end{aligned}$$

si studi prima la stablilità lineare dell'origine; quindi la stabilità dell'origine trovando una eventuale funzione di Lyapunov (suggerimento: si provi con polinomi).

2. Si determini la soluzione generale dell'equazione

$$y'' - y = e^{-x}.$$

3. Dire per quali valori di $\alpha, p > 0$ la funzione $y^{-\alpha}$ è integrabile sull'insieme $A = \{(x, y) : x \in (0, 1), y \in (x^p, 1)\}$. Per tali valori si calcoli

$$\int_A y^{-\alpha} dxdy.$$

4. Sia $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ la superficie determinata dal grafico di $G(x, y) = (x, y, g(x, y))$ definita su $Q = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0, 1], y \in [0, 1]\}$. Si mostri che, per ogni funzione $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$,

$$\int_\Sigma \langle f, n\rangle \, dS = \int_\Sigma \omega$$

dove n è la normale a Σ e

$$\omega = f_1 dx_2 \wedge dx_3 - f_2 dx_1 \wedge dx_3 + f_3 dx_1 \wedge dx_2.$$

5. Si trovino le soluzioni differenziabili e di periodo 2π dell'equazione

$$y'(t) + y(t - \pi/2) - y(t - \pi) = \cos t.$$

6. Sia f una funzione pari di periodo 4 tale che $f(x) = 1 - x$ per $x \in [0, 1]$ e $f(x) = 0$ per $x \in [1, 2]$. Si determini la serie di Fourier.

Soluzione

1. Il sistema linearizzato è

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

   La matrice A ha autovalori $\pm i\sqrt{2}$, dunque il sistema loneare è stabile, tuttavia questo non da alcuna informazione sulla stabilità dell'equazione originaria. Per investigare la stabilit a di quest'ultima si consideri la funzione $F(x,y) = \frac{x^2}{2} + y^2$. Data una qualunque soluzione $(x(t), y(t))$ del sistema non lineare si ha

$$\frac{d}{dt} F(x(t), y(t)) = x(2y - 3x^3) + 2y(-x - 3y^3) = -3x^4 - 6y^4 \leqslant 0.$$

   Poichè F ha superfici di livello compatte, ne segue che F è una funzione di Lyapunov e quindi zero è un punto di equilibrio asintoticamente stabile.

2. La soluzione generale dell'equazione lineare è $y(x) = ae^x + be^{-x}$. Per concludere basta trovare una soluzione particolare. È facile verificare che $y(x) = -\frac{x}{2}e^{-x}$ è soluzione, quindi la soluzione generale è data da

$$y(x) = ae^x + be^{-x} - \frac{x}{2}e^{-x}.$$

   In alternative si ponga $\xi = (y, y')$ e si scriva il sistema come

$$\xi' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \xi + e_2 e^{-x} =: A\xi + e_2 e^{-x}$$

   che ha soluzione

$$\xi(x) = e^{Ax}\xi_0 + \int_0^x e^{A(x-y)} e_2 e^{-y} dy.$$

   Poichè $A^2 = \mathbf{1}$ è facile verificare che

$$e^{Ax} = \begin{pmatrix} \cosh x & \sinh x \\ \sinh x & \cosh x \end{pmatrix}$$

   si può concludere calcolando l' integrale.

3. Si noti che $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ y \in (0,1), x \in (0, y^{1/p})\}$ e

$$\int_0^1 dy\, y^{-\alpha} \int_0^{y^{1/p}} dx = \int_0^1 dy\, y^{-\alpha + 1/p}.$$

   L'ultimo integrale è finito solo se $\alpha < 1 + \frac{1}{p}$. In tal caso, per Fubini, si ha

$$\int_A x^{-\alpha} dx dy = \int_0^1 dy\, y^{-\alpha+1/p} = \frac{p}{1 + p - \alpha p}.$$

   Ovviamente si poteva anche integrare prima in x e poi in y, ma il conto veniva un poco più complicato.

4. Si noti che

$$n = [(\partial_x g)^2 + (\partial_y g)^2 + 1]^{-\frac{1}{2}} (-\partial_x g, -\partial_y g, 1).$$

Dunque

$$\begin{aligned}\int_\Sigma \langle f, n\rangle \, dS &= \int_{[0,1]^2} dxdy\, [(\partial_x g)^2 + (\partial_y g)^2 + 1]^{\frac{1}{2}} \langle f, n\rangle \circ G \\ &= \int_{[0,1]^2} dxdy\, \langle f\circ G(x,y), (-\partial_x g(x,y), -\partial_y g(x,y), 1)\rangle.\end{aligned}$$

D'altro canto

$$\begin{aligned}\int_\Sigma \omega &= \int_{[0,1]^2} dxdy\, f_1\circ G\, dx_2 \wedge dx_3(\partial_x G, \partial_y G) - f_2 \circ G\, dx_1 \wedge dx_3(\partial_x G, \partial_y G) \\ &\quad + \int_{[0,1]^2} dxdy\, f_3 \circ G\, dx_1 \wedge dx_2(\partial_x G, \partial_y G) \\ &= \int_{[0,1]^2} dxdy\, f_1\circ G \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ \partial_x g & \partial_y g\end{vmatrix} - f_2\circ G \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \partial_x g & \partial_y g\end{vmatrix} + f_3 \circ G \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1\end{vmatrix} \\ &= \int_{[0,1]^2} dxdy\, \langle f\circ G, (-\partial_x g, -\partial_y g, 1)\rangle.\end{aligned}$$

5. Se y è una funzione periodica di periodo 2π. Allora i coefficienti di y' sono $ik\hat{y}_k$, dove $\hat{y}_k$ sono i coefficienti di Fourier di y; inoltre, per ogni $a > 0$, detta $y_a(t) = y(t-a)$, si ha

$$\widehat{(y_a)}_k = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} y(t-a)e^{-ikt}dt = \frac{e^{-ika}}{2\pi}\int_{-a}^{2\pi-a} y(t)e^{-ikt}dt = e^{-ika}\hat{y}_k.$$

Ne segue che se y soddisfa l'equazione i suoi coefficienti di Fourier devono soddisfare

$$\left[ik + e^{-ik\pi/2} - e^{-ik\pi}\right]\hat{y}_k = \frac{1}{2}(\delta_{k,-1} + \delta_{k,1}).$$

Si noti che il coefficiente in parentesi quadre è diverso da zero per tutti i $k \neq 0$. Ne segue che $\hat{y}_k = 0$ per tutti i $|k| > 1$. Infine

$$\hat{y}_1 = \frac{1}{2}\ ; \quad y_{-1} = \frac{1}{2}.$$

Ne segue the la soluzione è data da

$$y(t) = a + \cos t$$

per ogni $a \in \mathbb{R}$.

6. Chiamando $\hat{f}_k$ i coefficienti di Fourier si ha, per $k \neq 0$,

$$\begin{aligned}\hat{f}_k &= \frac{1}{4}\int_{-1}^1 e^{-i\pi kx/2} f(x)\, dx = \frac{1}{4}\int_0^1 e^{-i\pi kx/2} f(x)\, dx + \frac{1}{4}\int_0^1 e^{i\pi kx/2} f(x)\, dx \\ &= \frac{1}{2}\int_0^1 \cos(k\pi x/2)(1-x)\, dx = \frac{1}{k\pi}\int_0^1 \sin(k\pi x/2)\, dx \\ &= -\frac{2}{k^2\pi^2}\left[\cos(k\pi/2) - 1\right] = \frac{2}{k^2\pi^2}\begin{cases} 0 & \text{if } k = 4j \neq 0 \\ 1 & \text{if } k = 4j+1 \\ 2 & \text{if } k = 4j+2 \\ 1 & \text{if } k = 4j+3\end{cases}\end{aligned}$$

mentre $\hat{f}_0 = \frac{1}{4}$.