Calcolo II

Esame del 18/06/2018

Cognome.......................... Nome..........................

Avete 3:00 ore di tempo. Ogni esercizio vale 5 punti. Solo le **risposte chiaramente giustificate** saranno prese in considerazione. Le parti degli elaborati scritte in maniera **disordinata** o **incomprensibile** saranno **ignorate**.

1. Si mostri che le soluzioni del sistema di equazioni differenziali

$$\begin{aligned} x' &= x - xy^2 + \sin(x+y) \\ y' &= -x + \sin y, \end{aligned}$$

sono definite per tutti i tempi.

2. Si determini per quali $\omega \in \mathbb{R}$ esiste una soluzione non limitata dell'equazione

$$x'' + x = \sin \omega t.$$

3. Si calcoli l'interale

$$\int_\Delta e^{\frac{y-x}{y+x}} \, dxdy$$

dove Δ è il triangolo di vertici {(0,0), (1,0), (0,1)}.

4. Per ogni $a, r > 0$, si consideri il corpo conico $C_{a,r} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \; ; \; x \in [0,r], y^2 + z^2 \leqslant ax^2\}$ con densità di massa constante uguale ad uno e si calcoli la forza di gravità che esercita sul punto $(0,0)$.

5. Si calcolino i coefficienti di Fourier della funzione f di periodo uno e tale che $f(x) = 1$ per $x \in [0, 1/2]$ e $f(x) = 0$ per $x \in (1/2, 1)$. Si dica se la serie di Fourier converge a f in ogni punto.

6. Sia g un polinomio trigonometrico di periodo 2π. Si mostri che la sua serie di Fourier è una somma finita.

Soluzione

1. Si noti che $(x, y) \equiv (0, 0)$ è una soluzione della equazione differenziale, ne segue che la funzione $\xi(t) = \sqrt{x(t)^2 + y(t)^2}$ non può mai essere nulla a meno che non lo sia per tutti i tempi. Possiamo quindi assumere $\xi \neq 0$. Differenziando si ha
$$\dot{\xi} = \frac{2x(x - xy^2 + \sin(x + y)}{2\xi} + \frac{2y(-x + \sin y)}{2\xi}.$$
integrando e notando che
$$\begin{aligned}&|x \sin(x + y)| \leqslant x^2 + |xy| \leqslant x^2 + \frac{1}{2}(x^2 + y^2) \leqslant \frac{3}{2}\xi^2 \\ &|y \sin y| \leqslant y^2\end{aligned}$$
si ottiene
$$\xi(t) \leqslant \xi(0) + 3\int_0^t \xi(s)ds$$
che, per la disuguaglianza di Gronwall, implica
$$\xi(t) \leqslant e^{3t}\xi(0).$$
Poichè la soluzione non esplode è definita per tutti i tempi.

2. Poichè le soluzioni della omogenea sono limitate è sufficiente esibire una soluzione particolare. Se $\omega \notin \{-1, 1\}$ allora $x(t) = \frac{1}{1-\omega^2} \sin \omega t$ è una soluzione e quindi tutte le soluzioni sono limitate; se $\omega = -1$ allora $x(t) = \frac{t}{2} \cos(-t)$ è una soluzione e quindi tutte le soluzioni sono illimitate; se $\omega = 1$ allora $x(t) = -\frac{t}{2} \cos t$ è una soluzione e quindi, nuovamente, tutte le soluzioni sono illimitate.

3. È conveniente fare il cambio di variabili $z = y - x$, $w = y + x$. Nelle nuove variabili il dominio di integrazione diventa il triangolo T di vertici $\{(0, 0), (-1, 1), (1, 1)\}$ e si può quindi scrivere
$$\int_\Delta e^{\frac{y-x}{y+x}} dxdy = \frac{1}{2}\int_T e^{\frac{z}{w}} dzdw = \frac{1}{2}\int_0^1 dw \int_{-w}^{w} dze^{\frac{z}{w}} = \frac{e - e^{-1}}{2}\int_0^1 wdw = \frac{e - e^{-1}}{4}.$$

4. Si ricordi che il potenziale gravitazionale in zero generato da un punto di massa m situato in (x, y, z) è $V(x, y, z) = -\frac{G}{\|(x,y,z)\|}$. Per simmetria ne segue che la forza totale sarà nella direzione $(1, 0, 0) = n$ dunque la forza esercitata è data dall'integrale
$$\begin{aligned}-\int_{C_{a,r}} \langle(1, 0, 0), \nabla V(x, y, z)\rangle dxdydz &= -\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{c\varepsilon}^r dx \int_{y^2+z^2 \leqslant ax^2} \partial_x V(x, y, z)dydz \\ &= -\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{c\varepsilon}^r dx \int_{S_{a,\varepsilon}} \omega + \int_{c\varepsilon}^r dx \int_{D_{\varepsilon,a}} \omega\end{aligned}$$
dove c è una costante (dipendente da a) sufficientemente piccola, $\omega = \partial_x V dy \wedge dz - \partial_y V dx \wedge dz + \partial_z V dx \wedge dy$, $S_{a,\varepsilon}(x) = \partial(C_{a,x}\backslash B(0, \varepsilon))$, $B(0, \varepsilon) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ \|(x, y, z)\| \leqslant \varepsilon\}$ and $D_{\varepsilon,a} = \{(x, y, z) \in C_{a,r} \ : \ \|(x, y, z)\| = \varepsilon\}$.[1] Ne segue
$$\begin{aligned}-\int_{C_{a,r}} \langle(1, 0, 0), \nabla V(x, y, z)\rangle dxdydz &= -\lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^r dx \int_{C_{a,r}\backslash B(0,\varepsilon)} d\omega + r\int_{D_{\varepsilon,a}} \omega \\ &= 2\pi(\sqrt{1 + a} - 1)r\end{aligned}$$
visto che, per $(x, y, z) \neq 0$, $\Delta V(x, y, z) = 0$ e che $\nabla V = -\frac{G(x,y,z)}{\|(x,y,z)\|^3}$.

[1] Infatti l'integrale di ω sulla parte laterale di $S_{s,\varepsilon}$ è nullo.

5. Per definizione i coefficienti di Fourier sono dati da

$$\hat{f}_0 = \frac{1}{2}$$
$$\hat{f}_k = \int_0^1 f(x)e^{-2\pi ixk}dx = \int_0^{\frac{1}{2}} e^{-2\pi ixk}dx = \frac{1-\cos(\pi k)}{2\pi ki} \qquad \text{for } k \neq 0.$$

Dunque

$$f(x) = \frac{1}{2} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1-\cos(\pi k)}{\pi k} \sin \pi kx = \frac{1}{2} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2}{\pi(2k+1)} \sin \pi(2k+1)x.$$

La serie converge nei punti di differenziabilità della funzione, tuttavia in $x = 0$ la serie da $\frac{1}{2}$ invece che $f(0) = 1$.

6. Un polinomio trigonometrico di periodo 2π ha la forma

$$p(x) = \sum_{k=1}^{G} a_k \sin(2\pi j_k x)^{\alpha_k} + b_k \cos(2\pi l_k x)^{\beta_k}$$

per qualche $G, j_k, \alpha_k, l_k, \beta_k \in \mathbb{N}$ e $a_k, b_k \in \mathbb{R}$. Usando i numeri complessi si può scrivere come

$$p(x) = \sum_{k=1}^{G'} c_k e^{2\pi i s_k x}$$

con $c_k = \overline{c}_{-k} \in \mathbb{C}$ e $G', s_k \in \mathbb{N}$ da cui la conclusione è ovvia.