Calcolo II

Esame del 18/07/2018

Cognome......................... Nome.........................

Avete 3:00 ore di tempo. Ogni esercizio vale 5 punti. Solo le **risposte chiaramente giustificate** saranno prese in considerazione. Le parti degli elaborati scritte in maniera **disordinata** o **incomprensibile** saranno **ignorate**.

1. Si trovino le soluzione dell'equazione
$$x^2y''' - 2y' = 0$$
che sono definite per tutti gli $x \in \mathbb{R}$.

2. Si consideri il problema di Cauchy
$$\begin{aligned} x'' &= -4x^3 + 2x \\ x(0) &= -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \dot{x}(0) &= v. \end{aligned}$$
Si dica per quali valori di v la soluzione visita, nel futuro, il punto $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

3. Si consideri il corpo $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x^2 + y^2 \leqslant 1,\, x \geqslant 0,\, y \geqslant 0,\, z \geqslant 0,\, z \leqslant 1\}$ con densità di massa $\rho(x, y, z) = x + y$. Se ne calcoli la massa e il baricentro.

4. Data la regione $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x^2 + y^2 \leqslant 1; x + y + z \in [0, \pi/2]\}$ e la forma differenziale $\omega = \sin(x + y + z)\{dx \wedge dy - dx \wedge dz + dy \wedge dz\}$ si calcoli l'integrale
$$\int_{\partial\Omega} \omega.$$

5. Si consideri l'equazione
$$g(x + \omega) - g(x) = f(x),$$
dove $f \in \mathcal{C}^3(\mathbb{R})$ è una funzione periodica di periodo 2π e $\omega \in \mathbb{R}$ soddisfa
$$\left|\omega - 2\pi\frac{p}{q}\right| \geqslant cq^{-2}$$
per qualche $c > 0$ e per ogni $p, q \in \mathbb{Z}$, $q \neq 0$. Si discuta sotto quali condizioni l'equazione ammette una soluzione g continua e periodica di periodo 2π.

6. Si calcoli la serie di Fourier complessa di $[\cos(2\pi x)]^q$, per $q \in \mathbb{N}$.

Soluzione

1. Cerchiamo soluzioni del tipo x^r:

$$r(r-1)(r-2)x^{r-1} - 2rx^{r-1} = 0.$$

Questa equazione è identicamente soddisfatta per ogni x se $r = 0$, e $r = 3$. Poichè l'equazione è lineare lo spazio delle soluzioni è tridimensionale, ci manca quindi una soluzione. Si noti che $\ln x$ soddisfa l'equazione. Dunque la soluzione generale è data da

$$y(x) = a + bx^3 + c\ln x$$

per ogni $a, b, c \in \mathbb{R}$. Quelle definite per tutti gli $x \in \mathbb{R}$ corrispondono alla scelta $c = 0$.

2. Sono le equazioni di Newton con potenziale $V(x) = x^4 - x^2$ e massa 1. Ne segue (come si può facilmente verificare) che l'energia $E = \frac{p^2}{2} + V(x)$, $p = \dot{x}$, è conservata. Data la forma del potenziale tutti i moti sono periodici meno quelli di energia zero. Dalla condizione iniziale segue che $E = \frac{v^2}{2} - \frac{1}{4}$. Per potere visitare il punto $\frac{1}{\sqrt{2}}$ occorre passare da zero e poichè $V(0) = 0$ è il valore massimo in $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$, ne segue che basta che l'energia sia positiva, ovvero $|v| \geqslant \frac{1}{\sqrt{2}}$.

3. Se $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x^2 + y^2 \leqslant 1,\ x \geqslant 0\,, y \geqslant 0\}$ allora la massa è data dall'integrale

$$\int_0^1 dz \int_D (x+y)dxdy = \int_D (x+y)dxdy.$$

Passando in coordinate polari si ha

$$\int_0^1 dz \int_D (x+y)dxdy = \int_0^1 dr \int_0^{2\pi} r^2(\cos\theta + \sin\theta)drd\theta = \frac{2}{3}.$$

Dette (x_b, y_b, z_b) le coordinate del centro di massa si ha, per simmetria, $x_b = y_b$ e

$$x_b = \frac{\int_0^1 dz \int_D x(x+y)dxdy}{\int_0^1 dz \int_D (x+y)dxdy} = \frac{3}{2}\int_D x(x+y)dxdy = \frac{3}{16}\left(1 + \frac{\pi}{2}\right).$$

Mentre

$$z_b = \frac{\int_0^1 dz \int_D z(x+y)dxdy}{\int_0^1 dz \int_D (x+y)dxdy} = \frac{3}{4}\int_D (x+y)dxdy = \frac{1}{2}.$$

4. Per il teorema di Stokes si ha[1]

$$\int_{\partial\Omega} \omega = \int_\Omega d\omega = \int_\Omega 3\cos(x+y+z)dx \wedge dy \wedge dz = \int_\Omega 3\cos(x+y+z)dxdydz$$

Per continuare facciamo il cambio di variabile $\xi = x + y + z$, $x = x$, $y = y$. Da cui segue

$$\int_{\partial\Omega} \omega = \int_0^1 d\xi 3\cos\xi \int_{x^2+y^2\leqslant 1} dx\,dy = 3\pi \int_0^{\pi/2} d\xi \cos\xi = 3\pi.$$

[1]L'ultima uguaglianza segue semplicemente dall'equivalenza di due diverse definizioni dell'integrale (in $\mathbb{R}^3$): una è l'integrale di una tre forma e l'altro l'integrale di Riemann sulla regione Ω.

5. Si noti che

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-ikx}g(x+\omega)dx = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-ikx+ik\omega}g(x)dx = e^{-ik\omega}\hat{g}_k.$$

Dunque, se esiste una soluzione in L^2, sviluppando g e f in serie di Fourier si ha

$$(e^{-ik\omega}-1)\hat{g}_k = \hat{f}_k.$$

Per risolvere queste equazioni occorre che sia $f_k = 0$, ovvero $\int_0^{2\pi} f(x)dx = 0$. Se questa condizione è soddisfatta allora si può porre $\hat{g}_0 = 0$ e, per $k \neq 0$,

$$\hat{g}_k = (e^{-ik\omega}-1)^{-1}\hat{f}_k.$$

Rimane da vedere se questi coefficienti di Fourier definiscono una funzione continua. A questo scopo è necessario capire come decrescono al crescere di k. Si noti che

$$|e^{-ik\omega}-1| = \sqrt{(1-\cos(k\omega))^2 + (\sin(k\omega))^2} = \sqrt{2(1-\cos(k\omega))}.$$

Se eiste $p \in \mathbb{Z}$ tale che $k\omega - 2\pi p = \alpha$, $|\alpha| \leqslant \frac{\pi}{4}$, allora

$$1-\cos(k\omega) = 1-\cos(\alpha) = \frac{\alpha^2}{2} - \frac{\alpha^4}{4!}\cos\xi$$

per qualche $\xi \in [-\pi/4, \pi/4]$, dunque

$$1-\cos(k\omega) \geqslant \frac{\alpha^2}{4}.$$

D'altro canto, se $k\omega - 2\pi p = \alpha$, $|\alpha| \geqslant \frac{\pi}{4}$, allora

$$1-\cos(k\omega) \geqslant 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \geqslant \frac{1}{5}.$$

Ne segue che, per ogni $p \in \mathbb{Z}$,

$$|\hat{g}_k| \leqslant \left[5 + \frac{2}{|k\omega - 2\pi p|}\right]|\hat{f}_k| \leqslant \left[5 + \frac{2}{|\omega - 2\pi p/k|}\right]|k|^{-1}|\hat{f}_k|.$$

Possiamo finalmente usare l'ipotesi su ω nell'esercizio e scrivere

$$|\hat{g}_k| \leqslant \left[5 + 2c^{-1}k^2\right]|k|^{-1}|\hat{f}_k| \leqslant \left[5 + 2c^{-1}\right]|k||\hat{f}_k|.$$

Per concludere notiamo che, poichè $f \in \mathcal{C}^3$, deve essere $|\hat{f}_k| \leqslant C|k|^3$ per una qualche costante C. Dunque

$$|\hat{g}_k| \leqslant C\left[5 + 2c^{-1}\right]k^{-2}$$

che infatti definisce una funzione continua.

6. È conveniente usare i numeri complessi visto che semplificano notevolmente l'algebra:

$$\begin{aligned}[\cos 2\pi x]^q &= 2^{-q}\left[e^{2\pi x} + e^{-2\pi x}\right]^q = 2^{-q}\sum_{k=0}^{q}\binom{q}{k}e^{2\pi(2k-q)x} \\ &= \sum_{j=-q}^{q} a_j e^{2\pi j x}\end{aligned}$$

dove abbiamo usato il binomio di Newton e

$$a_j = \begin{cases} 2^{-q}\binom{q}{\frac{j+q}{2}} & \text{se } j+q \text{ è pari} \\ 0 & \text{altrimenti}\end{cases}$$

sono i coefficienti di Fourier (per definizione).