Calcolo II

Esame del 03/09/2018

Cognome........................ Nome........................

Avete 3:00 ore di tempo. Ogni esercizio vale 5 punti. Solo le **risposte chiaramente giustificate** saranno prese in considerazione. Le parti degli elaborati scritte in maniera **disordinata** o **incomprensibile** saranno **ignorate**.

1. Si mostri che le soluzioni del sistema di equazioni differenziali
$$\begin{aligned} x' &= -2y^4 + 2x \\ y' &= xy + y, \end{aligned}$$
sono definite per tutti i tempi.

2. Dato $\omega \neq 0$, si risolva il problema di Cauchy
$$\begin{aligned} &y'' + \omega^2 y = t^2 + 1 \\ &y(0) = \omega^{-2} - 2\omega^{-4} \\ &y'(0) = 1. \end{aligned}$$

3. Si considerino le regioni $\Omega_{n,\alpha} = \{(x,z) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \,:\, x \neq 0, 0 \leqslant z \leqslant \|x\|^\alpha \,;\, \|x\| \leqslant 1\}$. Si dica per quali $n \in \mathbb{N}$ e $\alpha \in \mathbb{R}$ il volume di $\Omega_{n,\alpha}$ è finito.

4. Si calcoli l'area superficiale di un cono di altezza h e base con raggio r.

5. Data $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ tale che
$$\int_{\mathbb{R}} |xf(x)|dx < \infty$$
si mostri che $\widehat{f}$ è differenziabile.

6. Si mostri che l'equazione funzionale
$$\int_{\mathbb{R}} f(u)G(t-u)du - 2f'(t) = 2G(t),$$
dove
$$G(s) = \begin{cases} 1 + \cos s & \text{per } x \in [-\pi,\pi] \\ 0 & \text{per } x \notin [-\pi,\pi], \end{cases}$$
ha un'unica soluzione e che tale soluzione è differenziabile.

Soluzione

1. Si definisca la funzione $\xi = x^2 + y^4$. Allora
$$\dot{\xi} = 2x\dot{x} + 4y^3\dot{y} = 4x^2 + 4y^4 = 4\xi.$$
Ne segue che $\xi(t) = \xi^0 e^{4t}$, quindi x, y sono limitate per tutti i tempi e la soluzione è ben definita.

2. Si tratta di un oscillatore armonico forzato, dunque la soluzione della omogenea è
$$y_o(t) = a\cos\omega t + b\sin\omega t.$$
Rimane da trovare una soluzione particolare. Proviamo con un polinomio di secondo grado $y_p(t) = \alpha t^2 + \beta y + \gamma$. Sostituendo nell'equazione vediamo che y_p è una soluzione per $\alpha = \omega^{-2}$, $\beta = 0$ e $\gamma = \omega^{-2} - 2\omega^{-4}$. Ne segue che la soluzione generale è
$$y_g(t) = a\cos\omega t + b\sin\omega t + \omega^{-2}t^2 + \omega^{-2} - 2\omega^{-4}.$$
Per concludere bisogna soddisfare le condizioni iniziali. Ne segue che la soluzione è
$$y(t) = \omega^{-1}\sin\omega t + \omega^{-2}t^2 + \omega^{-2} - 2\omega^{-4}.$$

3. Sia $B^n = \{x \in \mathbb{R}^n \; : \; \|x\| \leqslant 1; \; x \neq 0\}$, allora
$$\int_{\Omega_n} dxdz = \int_{B^n} dx \int_0^{\|x\|^\alpha} dz = \int_{B^n} dx\|x\|^\alpha.$$
Se $n = 1$, abbiamo
$$\int_{\Omega_1} dxdz = \int_{B^1} dx \int_0^{\|x\|^\alpha} dz = 2\int_0^1 dx\, x^\alpha.$$
che è convergente solo se $\alpha > -1$.
Consideriamo ora il caso $n > 1$. Definiamo la superficie $n-1$ dimensionale $S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^{n-1} \; : \; \|x\| = 1\}$. Tale superficie, localmente, sarà descritta da una funzione $v : U \subset \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}^n$ tale che $\|v(\theta)\| = 1$ per ogni $\theta \in U$, dove U è un aperto. Possiamo dunque introdurre il cambio di coordinate $F : [0,1] \times U \to B^n \subset \mathbb{R}^n$ come
$$x = F(r, \theta) = rv(\theta).$$
Chiaramente per $n = 2$ si tratta delle coordiante polari e per $n = 3$ di quelle sferiche, ma la formula è completamente generale. Si noti che
$$\det(DF) = \det\begin{pmatrix} v(\theta) & r\partial_{\theta_1}v(\theta) & \dots & r\partial_{\theta_{n-1}}v(\theta)\end{pmatrix} = r^{n-1}\det\begin{pmatrix} v(\theta) & \partial_{\theta_1}v(\theta) & \dots & \partial_{\theta_{n-1}}v(\theta)\end{pmatrix}.$$
Quindi, ponendo
$$g(\theta) = \det\begin{pmatrix} v(\theta) & \partial_{\theta_1}v(\theta) & \dots & \partial_{\theta_{n-1}}v(\theta)\end{pmatrix},$$
possiamo scrivere
$$\int_{B^n} dx \int_0^{\|x\|^\alpha} dz = \int_U d\theta g(\theta) \int_0^1 dr r^{\alpha+n-1}.$$
Ne segue che il volume è finito solo se $\alpha > -n$.

4. Ovviamente l'area della base è πr^2. La superficie laterale si può parametrizzare con $f : [0, r] \times [0, 2\pi) \to \mathbb{R}^2$ definita come

$$f(\rho, \theta) = \left(\rho \cos\theta, \rho \sin\theta, h - \frac{\rho}{r} h\right).$$

Ne segue che la superficie laterale del cono S è data da

$$\begin{aligned} S &= \pi r^2 + \int_0^r d\rho \int_0^{2\pi} d\theta \|\partial_\rho f \wedge \partial_\theta f\| = \pi r^2 + \int_0^r d\rho \int_0^{2\pi} d\theta \rho \sqrt{\frac{h^2}{r^2} + 1} \\ &= \pi \left(r^2 + r\sqrt{h^2 + r^2}\right). \end{aligned}$$

5. Ovviamente ci aspettiamo che $(\widehat{f})'$ sia la trasformata di Fourier di $-ixf(x)$ che, per ipotesi, è ben definita. Possiamo quindi cercare di dimostrare che $\widehat{f}$ è differenziabile calcolando

$$\lim_{h\to 0} h^{-1} \left[\widehat{f}(k+h) - \widehat{f}(k) + h \int_{\mathbb{R}} ixf(x)e^{-ikx} dx\right] = \lim_{h\to 0} \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-ixh} - 1 + ixh}{h} f(x) e^{-ikx} dx.$$

Si noti che esiste $C > 0$ tale che, per ogni $x \in \mathbb{R}$

$$\left|\frac{e^{-ixh} - 1 + ixh}{h}\right| \leqslant C|x|.$$

Dunque le funzioni integrande sono uniformemente integrabili e convergono uniformemente a zero sui compatti. Si può quindi portare il limite dentro l'integrale ed evincerne che il limite è zero e dunque la funzione è differenziabile e la sua derivata è

$$-\int_{\mathbb{R}} ixf(x)e^{-ikx} dx.$$

6. Prendendo la Trasformata di Fourier dell'equazione si ottiene

$$\widehat{f}(k)\widehat{G}(k) - 2ik\widehat{f}(k) = 2\widehat{G}(t).$$

Ovvero, a patto che $\widehat{G}(k) - 2ik$ sia sempre non zero,

$$\widehat{f}(k) = \frac{2\widehat{G}(k)}{\widehat{G}(k) - 2ik}.$$

Dobbiamo dunque calcolare

$$\widehat{G}(k) = \int_{\mathbb{R}} G(s)e^{-iks} ds = \int_{-\pi}^{\pi} e^{-iks} [1 + \cos s]\, ds = \int_{-\pi}^{\pi} \cos(ks) [1 + \cos s]\, ds$$

dove la seconda eguaglianza segue per ragioni di simmetria. Poichè, per $k \neq 0$,

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(ks) \cos s ds = -\frac{2 \sin ks}{k} + \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin(ks)}{k} \sin s ds = -\frac{2 \sin k\pi}{k} + \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos(ks)}{k^2} \cos s ds$$

si ha

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos(ks) \cos s ds = \frac{2k \sin k\pi}{1 - k^2}.$$

Dunque, per $k \neq 0$,

$$\widehat{G}(k) = \frac{2 \sin k\pi}{k(1 - k^2)}.$$

D'altronde

$$\widehat{G}(0) = \int_{-\pi}^{\pi} [1 + \cos s]\, ds = 2\pi.$$

Poichè $\widehat{G}$ è reale, il solo posto in cui $\widehat{G}(k) - 2ik$ potrebbe annullarsi è per $k = 0$, ma in tale punto vale 2π. Dunque la soluzione esiste ed è unica. Infine si noti che per k grande si ha $\widehat{f} \sim k^{-4}$. Dunque la trasformata di Fourier di f' tende a zero come k^{-3} ed è quindi integrabile. Dunque f è differenziabile.