FORME ESTERNE E VOLUMI

CARLANGELO LIVERANI

1. Un poco di algebra

1.1. **Duale.** Dato uno spazio vettoriale $\mathbb{V}$ finito dimensionale[1] lo spazio duale, detto $\mathbb{V}'$, è semplicemente l'insieme di tutte le funzioni lineari da $\mathbb{V}$ in $\mathbb{R}$.[2] Se $\mathbb{V} = \mathbb{R}^n$ cosa è $\mathbb{V}'$?

Dato $v \in \mathbb{R}^n$ e $\ell \in \mathbb{V}'$ si scriva $v = \sum_{k=1}^n v_n e_k$ e si ponga $a_k = \ell(e_k)$. Allora, per la linearità di ℓ

$$\ell(v) = \sum_{k=1}^n v_k \ell(e_k) = \sum_{k=1}^n v_k a_k = \langle a, v\rangle$$

dove $a = (a_1, \dots, a_k) \in \mathbb{R}^n$. Ne segue che si può identificare ℓ col vettore a e dunque $\mathbb{V}' = \mathbb{R}^n$.

1.2. **Tensori.** Esiste una naturale generalizzazione della costruzione precedente: si possono considerare funzioni *bilineari* da $\mathbb{V}$ in $\mathbb{R}$, ovvero funzioni $\ell : \mathbb{V}^2 \to \mathbb{R}$ tali che per ogni $v, w, a \in \mathbb{V}$ si ha

$$\begin{aligned}\ell(v + w, a) &= \ell(v, a) + \ell(w, a)\\ \ell(a, v + w) &= \ell(a, v) + \ell(a, w).\end{aligned}$$

Chiameremo $\mathbb{V} \otimes \mathbb{V}$ l'insieme di tali funzioni.

Esercizio 1.1. *Mostrare che gli elementi di $\mathbb{V} \otimes \mathbb{V}$ non sono funzioni lineari da $\mathbb{V}^2 \to \mathbb{R}$.*

Come sono fatte?

Ragioniamo come sopra. Sia $\mathbb{V} = \mathbb{R}^n$. Dati $v, w \in \mathbb{V}$ e $\ell \in \mathbb{V} \otimes \mathbb{V}$ si scriva $v = \sum_{k=1}^n v_k e_k$, $w = \sum_{k=1}^n w_k e_k$ e si ponga $a_{k,j} = \ell(e_k, e_j)$. Allora

$$\ell(v, w) = \sum_{k,j=1}^n v_k w_j \ell(e_k, e_j) = \sum_{k,j=1}^n v_k w_j a_{k,j} = \langle v, Aw\rangle$$

dove A è la matrice $n \times n$ con element $a_{i,j}$. Ne segue che si può identificare $\mathbb{V} \otimes \mathbb{V}$ con lo spazio vettoriale delle matrici $n \times n$. Tale spazio ha dimensione n^2, dunque si può identificare $\mathbb{V} \otimes \mathbb{V}$ con $\mathbb{R}^{n^2}$.

Si noti che dati due elementi $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^n$ si può costruire la funzione bilineare $\alpha \otimes \beta$ definita da[3]

$$\alpha \otimes \beta(v, w) = \langle v, \alpha\rangle\langle \beta, w\rangle.$$

Date: Versione aggiornata November 23, 2017.

[1] Quanto segue può essere esteso a qualunque spazio vettoriale, ma teniamoci semplici.

[2] Oppure da $\mathbb{V}$ in $\mathbb{C}$ se $\mathbb{V}$ è sul campo dei complessi, qui ci limiteremo a spazi vettoriali sul campo dei reali.

[3] Nella notazione comunemente usata in meccanica quantistica tale oggetto si chiamerebbe $|\alpha\rangle\langle\beta|$.

Si noti che gli elementi $e_i \otimes e_j$ sono tutti linearmente indipendenti e formano quindi una base di $\mathbb{R}^n \otimes \mathbb{R}^n$.

Esercizio 1.2. *Si ragioni nello stesso modo per verificare che lo spazio delle funzioni $k-$lineary, $\otimes^k \mathbb{V}$, ha dimensione n^k. Inoltre si verifichi che, dati due spazi $\mathbb{V}$ e $\mathbb{W}$ di dimensione n, d, rispettivamente, lo spazio delle funzioni bilineari da $\mathbb{V} \times \mathbb{W}$ a $\mathbb{R}$ ha dimensione nd.*

Tutti gli oggetti sopra descritti si chiamano *tensori*. Esistono due casi particolarmente interessanti di tensori: quelli simmetrici (l'ordine degli argomenti non conta) e quelli antisimmetrici (se si scambia l'ordine di qualunque due argomenti il valore della funzione multilineare cambia di segno). In questa nota siamo interessati al caso antisimmetrico.

1.3. **Tensori antisimmetrici: casi speciali.** Cominciamo dal caso più semplice: funzioni bilineari antisimmetriche. Dato uno spazio $\mathbb{V}$ lo spazio delle funzioni bilineari antisimmetriche si designa con $\mathbb{V} \wedge \mathbb{V} \subset \mathbb{V} \otimes \mathbb{V}$ e si chiama *prodotto esterno*. Come è fatto?

Abbiamo visto che gli elementi di $\mathbb{V} \wedge \mathbb{V}$ possono essere rappresentati come matrici, che proprietà hanno tali matrici? Sia A la marice associata ad $\ell \in \mathbb{R}^n \wedge \mathbb{R}^n$, allora, per ogni $v, w \in \mathbb{R}^n$, si ha

$$\langle v, Aw \rangle = \ell(v, w) = -\ell(v, w) = -\langle w, Av \rangle = -\langle A^* w, v \rangle.$$

Ne segue $A = -A^*$, ovvero la matrice deve essere antisimmetrica. D'altro canto è facile verificare che ad ogni matrice antisimemtrica è associato un elemento di $\mathbb{R}^n \wedge \mathbb{R}^n$. Ne segue che $\mathbb{R}^n \wedge \mathbb{R}^n$ è isomorfo allo spazio delle matrici antisimemtriche e quindi ha dimensione $\frac{n(n-1)}{2}$.

Risulta essere interessante costruire gli elementi di $\mathbb{V} \wedge \mathbb{V}$ partendo da elementi di $\mathbb{V}$ come abbiamo fatto nel caso generale.

Dati $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^n$ possiamo costruire un tensore antisimmetrico, che chiameremo $\alpha \wedge \beta$, nel seguente modo[4]

$$\begin{aligned}\alpha \wedge \beta(v, w) &= \sum_{i,j=1}^n \alpha_i \beta_j v_i w_j - \alpha_i \beta_j w_j v_i = \sum_{i,j=1}^n (\alpha_i \beta_j - \alpha_j \beta_i) v_i w_j \\ &= \langle v | \left(|\alpha\rangle\langle\beta| - |\beta\rangle\langle\alpha| \right) |w\rangle.\end{aligned}$$

Ovvero $\alpha \wedge \beta$ è il tensore associato alla matrice antisimetrica $A = (\alpha_i \beta_j - \alpha_j \beta_i)$.

Esercizio 1.3. *Si mostri che $\{e_i \wedge e_j\}_{i>j}$ forma una base dello spazio $\mathbb{R}^n \wedge \mathbb{R}^n$.*

È interessante studiare alcuni casi in maniera più esplicita. Cominciamo dal caso $n = 2$, in questo caso $\mathbb{R}^2 \wedge \mathbb{R}^2$ è uno spazio unidimensionale. Dati $v, w \in \mathbb{R}^2$ si ha che la matrice A associata al tensore $v \wedge w$ ha la forma

$$A = \begin{pmatrix} 0 & v_1 w_2 - w_1 v_2 \\ -v_1 w_2 + w_1 v_2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \det \begin{pmatrix} v_1 & w_1 \\ v_2 & w_2 \end{pmatrix}.$$

Ovvero

$$v \wedge w = \det \begin{pmatrix} v_1 & w_1 \\ v_2 & w_2 \end{pmatrix} e_1 \wedge e_2.$$

Sembra dunque esistere una relazione tra il prodotto esterno e il determinante. Vediamo di investigare ulteriormente la faccenda.

[4] L"ultima riga è scritta nella notazione comunemente usata in meccanica quantistica.

Consideriamo $n = 3$. In tal caso $\mathbb{R}^3 \wedge \mathbb{R}^3$ ha dimensione 3 ed è quindi isomorfo a $\mathbb{R}^3$. In questo caso se $v, w \in \mathbb{R}^3$ allora $v \wedge w$ è associato alla matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & v_1 w_2 - w_1 v_2 & v_1 w_3 - v_3 w_1 \\ w_1 v_2 - v_1 w_2 & 0 & v_2 w_3 - v_3 w_2 \\ v_3 w_1 - w_3 v_1 & v_3 w_2 - v_2 w_3 & 0 \end{pmatrix}$$

Esercizio 1.4. *Data la matrice antisimmetrica*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & c & -b \\ -c & 0 & a \\ b & -a & 0 \end{pmatrix} \tag{1.1}$$

e il vettore $v = (a, b, c)$, *si mostri che* $Av = 0$ *e* $\mathrm{Tr}(A^2) = -2\|v\|^2$. *Per contro, si mostri che se* $B^* = -B$, $Bv = 0$ *e* $-\frac{1}{2}\mathrm{Tr}(B^2) = \|v\|^2$ *allora* $B = \pm A$.

Nel seguito diremo che il vettore v determina la matrice antisimmetrica A se A è della forma (1.1).

Esercizio 1.5. *Si mostri che, per ogni* $v, w \in \mathbb{R}^3$, *la matrice associata a* $v \wedge w$ *è determinata dal prodotto vettoriale* $v \times w$. *inoltre si mostri che*

$$\det \begin{pmatrix} v & w & v \times w \end{pmatrix} > 0.$$

Dato un cambio di variabile lineare U in $\mathbb{R}^n$ (ovvero nelle nuove coordinate un vettore v ha coordinate $v' = Uv$), e $\ell \in \mathbb{R}^n \wedge \mathbb{R}^n$, si ha che, chiamando ℓ' l'espressione di ℓ nelle nuove coordinate, deve essere[5]

$$\ell'(v', w') = \ell(v, w) = \ell(U^{-1}v', U^{-1}w').$$

Dunque se A è la matrice associata ad ℓ e A' quella associata a ℓ', ne segue

$$\langle v', A'w' \rangle = \langle v', (U^{-1})^* A U^{-1} v' \rangle$$

ovvero

$$A' = (U^{-1})^* A U^{-1}. \tag{1.2}$$

Esercizio 1.6. *Si mostri che, dato un cambio di variabili ortogonale* R *in* $\mathbb{R}^3$, *e* $v, w \in \mathbb{R}^3$ *la forma bilineare* $v \wedge w$ *nelle nuove coordinate è associata alla matrice determinata dal vettore* $R(v \times w)$ *(Suggerimento: si usi quanto dimostrato negli esercizi 1.4, 1.5).*

Esercizio 1.7. *Si mostri che, dato il cambio di coordinate* $U = \alpha \mathbb{1}$,[6] *e* $v, w \in \mathbb{R}^3$ *la forma bilineare* $v \wedge w$ *nelle nuove coordinate è associata alla matrice determinata dal vettore* $\alpha^2(v \times w)$. Dunque il prodotto vettoriale non si trasforma come un vettore per cambi di coordinate non ortogonali.

Esercizio 1.8. *Dati* $v, w \in \mathbb{R}^3$ *si mostri che il vettore che determina la matrice associata alla forma bilineare* $v \wedge w$ *è un vettore perpendicolare a* v *e* w *e di lunghezza proporzionale all'area del parallelogrammo individuato da tali vettori.*

[5] Stiamo semplicemente chiedendo che il numero $\ell(v, w)$ non dipenda dalle coordinate scelte.

[6] Stiamo semplicemente cambiando la nostra unità di misura e riflettendo rispetto all'origine se $\alpha < 0$.

1.4. **Tensori antisimmetrici: caso (più) generale.** Prima di entrare nell'argomento occorre richiamare alcuni fatti sulle permutazioni. Si dice permutazione di k elementi una funzione invertibile $\pi : \{1,\dots,k\} \to \{1,\dots,k\}$. Data una permutazione π gli si può associare un segno $\sigma(\pi)$ nel seguente modo: $\sigma(\text{id}) = 1$; per ogni $i \neq j \in \{1,\dots,k\}$, detta

$$\pi_{i,j}(n) = \begin{cases} n & \text{if } n \notin \{i,j\} \\ j & \text{if } n = i \\ i & \text{if } n = j \end{cases},$$

si ha $\sigma(\pi_{i,j}) = -1$; inoltre, date due permutazioni π, π', $\sigma(\pi \circ \pi') = \sigma(\pi)\sigma(\pi')$.

Esercizio 1.9. *Si mostri che tutte le permutazioni si possono ottenere componendo elementi di $\{\pi_{i,j}\}$. Si mostri che il segno di una permutazione è ben definito.*

Dato uno spazio $\mathbb{V}$ l'insieme delle funzioni $k-$lineari completamente antisimmetriche è indicato con $\wedge^k\mathbb{V}$, ovvero $\ell \in \wedge^k\mathbb{V}$ se e solo se $\ell \in \otimes^n\mathbb{V}$ e, per ogni $v_1,\dots,v_k \in \mathbb{V}$ e permutazione π,

$$\ell(v_{\pi(1)},\dots,v_{\pi(k)}) = \sigma(\pi)\ell(v_1,\dots,v_k).$$

Esercizio 1.10. *Dato $\ell \in \wedge^k\mathbb{V}$ e $v_1,\dots,v_k \in \mathbb{V}$, si mostri che se esistono i,j tali che $v_i = v_j$, allora $\ell(v_1,\dots,v_k) = 0$. Se ne deduca che se i vettori $v_1,\dots,v_k \in \mathbb{V}$ non sono linearmente indipendenti, allora $\ell(v_1,\dots,v_k) = 0$.*

Si noti che l' esercizio precedente implica che se $\dim(\mathbb{V}) = n$ allora per ogni $k > n$ si ha $\wedge^k\mathbb{V} = \{0\}$.

Studiamo ora l'interessante caso $\mathbb{V} = \mathbb{R}^n$ e $\wedge^n\mathbb{V}$.

Lemma 1.11. *Per ogni $n \in \mathbb{N}$, si ha* $\dim(\wedge^n\mathbb{V}) = 1$.

Proof. Abbiamo visto che $\ell \in \otimes^n\mathbb{R}^n$ è determinato dai numeri $\{\ell(e_{i_1},\dots,e_{i_n})\}$. Tuttavia, poichè $\ell \in \wedge^n\mathbb{V}$ ne segue che tali numeri sono non nulli solo se tutti gli i_k sono differenti, ovvero, esiste una permutazione π tale che $\pi(j) = i_j$. Ma $\ell(e_{\pi(1)},\dots e_{\pi(n)}) = \sigma(\pi)\ell(e_1,\dots,e_n)$. Dunque ℓ è univocamente determinato dal numero $\ell(e_1,\dots,e_n)$, da cui l'affermazione del Lemma. Infatti se $\ell, \ell' \in \wedge^n\mathbb{V}$, allora $\ell - \frac{\ell(e_1,\dots,e_n)}{\ell'(e_1,\dots,e_n)}\ell' = 0$. □

Come sono quindi fatti gli elementi di $\wedge^n\mathbb{V}$?

Esercizio 1.12. *Dati i vettori $v_1,\dots,v_n \in \mathbb{R}^n$ si formi la matrice quadrata*

$$A(v_1,\dots,v_n) = \begin{pmatrix} v_{1,1} & \dots & v_{n,1} \\ \dots & \dots & \dots \\ v_{n,1} & \dots & v_{n,n} \end{pmatrix}$$

e si mostri che definendo ℓ_* come $\ell_*(v_1,\dots,v_n) = \det A(v_1,\dots,v_n)$, $\ell_* \in \wedge^n\mathbb{V}$.

Dunque tutti gli elementi di $\wedge^n\mathbb{V}$ sono proporzionali a ℓ_*.

Come è fatto invece $\wedge^n\mathbb{V}$ per $k < n$.

Esercizio 1.13. *Si mostri che $\ell \in \wedge^k\mathbb{R}^n$ è unicamente determinato dai numeri $\{\ell(e_{i_1},\dots,e_{i_k})\}_{i_1<i_2<\dots<i_k}$.*

Si considerino le funzioni $\pi : \{1, \dots, k\}$ con la proprietà $i \neq j \to \pi(i) \neq \pi(j)$.[7] Sia $R(\pi) = \pi(\{1, \dots, k\})$ l'immagine di π. Dati π, π' si noti che se $R(\pi) = R(\pi')$ allora esiste una permutazione π_* di $\{1, \dots, k\}$ tale che $\pi' = \pi_* \circ \pi$. Si definisca

$$\sigma_\pi(\pi') = \begin{cases} 0 & \text{if } R(\pi) \neq R(\pi) \\ \sigma(\pi_*) & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Data un tale π definisca $e_{\pi(1)} \wedge \dots \wedge e_{\pi(k)}$ l'elemento $\ell \in \wedge^k \mathbb{R}^n$ con le seguenti proprietà: per ogni π' si ha

$$\ell(e_{\pi'(1)}, \dots e_{\pi'(k)}) = \sigma_\pi(\pi').$$

Esercizio 1.14. *Si mostri che $e_{\pi(1)} \wedge \dots \wedge e_{\pi(k)}$ formano una base di $\wedge^k \mathbb{R}^n$. Si mostri che, per ogni insieme di vettori $v_1, \dots, v_k \in \mathbb{R}^n$,*

$$e_{\pi(1)} \wedge \dots \wedge e_{\pi(k)}(v_1, \dots, v_k) = \det \begin{pmatrix} v_{1,\pi(1)} & \dots & v_{k,\pi(1)} \\ \dots & \dots & \dots \\ v_{1,\pi(k)} & \dots & v_{k,\pi(k)} \end{pmatrix}.$$

2. Forme differenziali

Ricorderete che una forma differenziale è semplicemente una funzione da $\mathbb{R}^n$ nello spazio delle funzioni lineari. Tale concetto si può facilmente generalizzare decidendo che una k-forma differenziale è una funzione da $\mathbb{R}^n$ a $\wedge^k \mathbb{R}^n$. Usiamo la convenzione che $\wedge^0 \mathbb{R}^n = \mathbb{R}$, $\wedge^1 \mathbb{R}^n = (\mathbb{R}^n)'$ (ovvero le spazio delle funzioni lineari su $\mathbb{R}^n$, che poi è isomorfo a $\mathbb{R}^n$).

Risulta inoltre utile usare la notazione $dx_k \in (\mathbb{R}^n)'$ definito da $dx_k(e_j) = \delta_{k,j}$ e $dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k} \in \wedge^k \mathbb{R}^n$ definito da (si ricordi l'esercizio 1.14)

$$dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}(e_{j_1}, \dots, e_{j_k}) = \det \begin{pmatrix} \delta_{i_1,j_1} & \dots & \delta_{i_1,j_k} \\ \dots & \dots & \dots \\ \delta_{i_k,j_1} & \dots & \delta_{i_k,j_k} \end{pmatrix}. \tag{2.1}$$

Esercizio 2.1. *Si mostri che (2.1) definisce unicamente una forma k-multilineare antisimmetrica.*

Esercizio 2.2. *Si mostri che se $i_s = i_r$ per un qualche $s \neq r \in \{1, \dots, k\}$ allora $dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k} = 0$.*

Esercizio 2.3. *Si mostri che ogni forma k-differenziale ω si può scrivere come*

$$\omega = \sum_{i_1 < \dots < i_k} a_{i_1, \dots, i_k}(x) dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k} \tag{2.2}$$

Nel seguito chiederemo che le forme siano $\mathcal{C}^\infty$, ovvero che i coefficienti $a_{i_1,\dots,i_k}$ siano infinitamente differenziabili.

Si noti che per $k = 0$ si ha semplicemente $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ e per $k = 1$ si hanno le 1-forme differenziali viste nel corso di calcolo 1.

[7] Si noti che è se $k = n$, allora π è una permutazione, stiamo quindi solo generalizzando la notazione precedente, da cui lo stesso nome.

Con la notazione (2.2) possiamo facilmente definire il prodotto esterno di due forme differenziali, ovvero date

$$\omega = \sum_{i_1<\cdots<i_k} a_{i_1,\dots,i_k}(x) dx_{i_1}\wedge\cdots\wedge dx_{i_k}$$
$$\omega' = \sum_{j_1<\cdots<j_l} b_{j_1,\dots,j_l}(x) dx_{j_1}\wedge\cdots\wedge dx_{j_l}$$

possiamo definire

$$\omega\wedge\omega' = \sum_{i_1<\cdots<i_k}\sum_{j_1<\cdots<j_l} a_{i_1,\dots,i_k}(x) b_{j_1,\dots,j_l}(x) dx_{i_1}\wedge\cdots\wedge dx_{i_k}\wedge dx_{j_1}\wedge\cdots\wedge dx_{j_l}.$$

Esercizio 2.4. *Si mostri che se $i_s = j_r$ per un qualche $s\in\{1,\dots,k\}$ e $r\in\{1,\dots,j\}$ allora $\omega\wedge\omega' = 0$.*

Sarà infine utile introdurre un altro concetto: quello di *differenziale esterno*. Data una forma ω come in (2.2) definiamo

$$d\omega = \sum_{i_1<\cdots<i_k}\sum_{j=1}^{n} \partial_{x_j} a_{i_1,\dots,i_k}(x) dx_j\wedge dx_{i_1}\wedge\cdots\wedge dx_{i_k}.$$

Lemma 2.5. *Per ogni forma ω, $d^2\omega = 0$.*

Proof. Scriviamo ω come in (2.2), applicando due volte la definzione abbiamo

$$d^2\omega = \sum_{i_1<\cdots<i_k}\sum_{j=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} \partial_{x_l}\partial_{x_j} a_{i_1,\dots,i_k}(x) dx_l\wedge dx_j\wedge dx_{i_1}\wedge\cdots\wedge dx_{i_k}$$

si noti che i coefficenti sono simmetrici in j, l (per Schwartz) mentre la forma è antisimmetrica in j, l, da ciò l'affermazione segue banalmente. $\square$

Si noti che se $k = 0$ allora $\omega = a(x)$ e $d\omega = \sum_{j=1}^{n} \partial_{x_j} a(x) dx_j$, ovvero abbiamo riottenuto il differenziale.

Come passo finale vogliamo generalizzare il concetto di curva a quello di superficie: una k-superficie è definita come una funzione $\sigma : [-a, a]^k \to \mathbb{R}^n$ con la proprietà che ad ogni punto la derivata $D\sigma$ (che è una matrice $n\times k$) ha rango massimo (ovvero k) e che $\sigma(z) = \sigma(z')$ implica $z = z'$. Data una k-superficie e una k-forma ω possiamo definire l'integrale

$$\int_\sigma \omega = \int_{[-a,a]^k} \omega(\partial_{z_1}\sigma,\dots,\partial_{z_k}\sigma) dz_1\dots dz_k. \tag{2.3}$$

Esercizio 2.6. *Si mostri che, se $k = 1$, la definizione (2.3) riproduce esattamente la definizione di integrale di una 1-forma lungo una curva.*

Data una k-superficie σ sia $\Sigma = \sigma([-a, a]^k)$.

Esercizio 2.7. *Date due k-superfici $\sigma : [-a, a]^k \to \mathbb{R}^n$ e $\sigma' : [-b, b]^k \to \mathbb{R}^n$ tali che $\sigma([-a, a]^k) = \sigma([-b, b]^k)$ si mostri che esiste una funzione invertibile $g : [-b, b]^k \to [-a, a]^k$ tale che $\sigma' = \sigma\circ g$.*

Diremo che due k-superfici σ, σ' sono equivalenti se hanno la stessa immagine e dato g tale che $\sigma' = \sigma\circ g$ si ha $\det DG > 0$. Si noti che tutte le k-superfici con la stessa immagine Σ si dividono in due classi di equivalenza, diremo che gli elementi della stessa classe hanno lo stesso *orientamento*.

Lemma 2.8. *Date due k-superfici $\sigma : [-a,a]^k \to \mathbb{R}^n$ e $\sigma' : [-b,b]^k \to \mathbb{R}^n$ equivalenti si ha, per ogni k-forma ω*

$$\int_\sigma \omega = \int_{\sigma'} \omega$$

Proof. Sappiamo che esiste una funzione invertibile $g : [-b,b]^k \to [-a,a]^k$ tale che $\sigma' = \sigma \circ g$ e $\det DG > 0$. Allora

$$\int_{\sigma'} \omega = \int_{[-b,b]^k} \omega(\partial_{z_1}(\sigma \circ g), \dots, \partial_{z_k}(\sigma \circ g)) dz_1 \dots dz_k.$$

Per continuare si noti che, dati k numeri $\{i_1, \dots, i_k\}$, possiamo definire le funzioni $\bar\sigma(x) = (\bar\sigma_1(x), \dots, \bar\sigma_k(x)) := (\sigma_{i_1}(x), \dots, \sigma_{i_k}(x))$ e analogamente per $\bar\sigma'$. Ricordando (2.1) abbiamo

$$\begin{aligned} &dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}(\partial_{z_1}(\sigma \circ g), \dots, \partial_{z_k}(\sigma \circ g)) = \det(D(\bar\sigma \circ g)) = \det((D\bar\sigma) \circ g Dg) \\ &= \det(D\bar\sigma) \circ g \det(Dg) = [dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}(\partial_{z_1}\sigma, \dots, \partial_{z_k}\sigma)] \circ g \det(Dg). \end{aligned}$$

Da cui segue

$$\omega(\partial_{z_1}(\sigma \circ g), \dots, \partial_{z_k}(\sigma \circ g)) = \omega(\partial_{z_1}\sigma, \dots, \partial_{z_k}\sigma) \circ g \det(Dg).$$

Il lemma segue quindi dalla formula per il cambio di variabile negli integrali multipli. □

Si noti che il Lemma 2.8 è la generalizzazione del fatto che l'integrale di una 1 forma non dipende dalla parametrizzazione. Data una k-superificie $\sigma : [-a,a]^k \to \mathbb{R}^n$, $\Sigma = \sigma([-a,a]^k)$ è quindi legittimo scrivere

$$\int_\sigma \omega = \int_\Sigma \omega.$$

Esercizio 2.9. *Si mostri che per ogni parametrizzazione $\sigma : [-a,a]^k \to \mathbb{R}^n$ di una k-superfice orientata Σ si ha che $\partial\Sigma = \sigma(\partial[-a,a]^k)$. Inoltre si mostri che $\partial\Sigma$ consiste dell'unione di $k-1$ superfici orientate. (Suggerimento: per ogni j si considerino le $k-1$ superfici $\sigma_j^\pm(u_1, \dots, u_{j-1}, \pm a, u_{j+1}, \dots, u_k) : [-a,a]^{k-1} \to \mathbb{R}^n$.)*

Esercizio 2.10 (Stokes formula)**.** *Si dimostri che in $\mathbb{R}^n$, per ogni k- forma ω e $k+1$-superficie, $k < n$, si ha*

$$\int_{\partial\Sigma} \omega = \int_\Sigma d\omega \tag{2.4}$$

(Suggerimento: a) si noti che è sufficiente dimostrarla per $\omega = a(x)dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$; b) si parta dal lato destro e si scriva esplicitamente la formula in funzione di σ; c) si integri per parte; d) si noti che

$$\sum_{l=1}^n \partial_{u_l} \det \begin{pmatrix} \partial_{u_1}\sigma_{i_1} & \dots & \partial_{u_k}\sigma_{i_1} \\ \dots & \dots & \dots \\ \partial_{u_1}\sigma_{i_k} & \dots & \partial_{u_k}\sigma_{i_k} \end{pmatrix} = 0;$$

d) si noti che l'espressione che si è ottenuta è uguale al primo membro della (2.4).)

Esercizio 2.11. *Si verifichi che i teoremi di Gauss-Green, della divergenza e di Stokes sono tutti casi particolari della formula (2.4).*

Esercizio 2.12. *Data una k-superficie orientata Σ, si mostri che $\partial^2\Sigma = \emptyset$. (suggerimento: Per $k \leq 2$ si vede geometricamente: il bordo di una superficie è una curva chiusa che quindi non ha bordo. Per ogni $k-2$, $k > 2$ si consideri qualunque $k-2$ forma ω, allora*

$$\int_{\partial^2\Sigma} \omega = \int_{\partial\Sigma} d\omega = \int_{\Sigma} d^2\omega = 0$$

dove abbiamo usato due volte (2.4) *e il Lemma 2.5. Ne segue che $\partial^2\Sigma$ deve essere vuoto.)*

Carlangelo Liverani, Dipartimento di Matematica, II Università di Roma (Tor Vergata), Via della Ricerca Scientifica, 00133 Roma, Italy.
E-mail address: liverani@mat.uniroma2.it