NORME E PRODOTTI SCALARI

CARLANGELO LIVERANI

1. Spazi vettoriali normati

Assumo che sappiate cosa è una spazio vettoriale[1] Il primo concetto che vorremmo introdurre è quello di *lunghezza* di un vettore: la *norma*. Dato uno spazio vettoriale $\mathbb{V}$ su un campo K (siano i complessi o i reali) una norma è una funzione $\|\cdot\| : \mathbb{V} \to \mathbb{R}_+$ con le seguenti proprietà

(1) $\|v\| = 0 \Longrightarrow v = 0$
(2) $\|\lambda v\| = |\lambda|\|v\|$ per ogni $v \in \mathbb{V}$ e $\lambda \in K$
(3) $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$ per ogni $v, w \in \mathbb{V}$.

Data una norma è naturale definire la *distanza* tra due vettori $x, y \in \mathbb{V}$ come $d(x, y) = \|x - y\|$.

Problem 1.1. *Si verifichi che d soddisfa la disuguaglianza triangolare.*

Problem 1.2. *Si verifichi che, per ogni $n, p \in \mathbb{N}$, se definiamo, per $x \in \mathbb{R}^n$, $\|x\|_p = \left[\sum_{i=1}^n |x_i|^p\right]^{\frac{1}{p}}$ allora $\|\cdot\|_p$ è una norma.*

Problem 1.3. *Si verifichi che se definiamo, per $x \in \mathbb{R}^n$, $\|x\|_\infty = \sup_{i=1}^n |x_i|$ allora $\|\cdot\|_\infty$ è una norma.*

Problem 1.4. *Si verifichi che le affermazioni nei due problemi precedenti sono valide anche in $\mathbb{C}^n$.*

2. Pitagora

Un teorema fondamentale in geometria che abbiamo imparato da piccoli è il teorema di Pitagora per i triangoli rettangoli. Sarebbe bello avere un teorema del genere su spazi vettoriali astratti ma ci scontriamo con un problema di base: cosa è (in astratto) un triangolo rettangolo e, più in generale, cosa è un angolo?

La cosa non è ovvia. Il promo passo sarebbe se riuscissimo a dire cosa è un triangolo rettangolo senza fare riferimento agli angoli.

Dati $x, y \in \mathbb{R}^2$ un poco di geometria mostra che il triangolo di vertici $0, x, y$ è rettangolo solo se $\|x-y\|_2 = \|x+y\|_2$ (ovvero le diagonali del quadrilatero di vertici $0, x, x+y, y$ sono lunghe uguali). Possiamo quindi decidere che il triangolo di vertici $0, x, y$ in uno spazio vettoriale normato è rettangolo se e solo se $\|x - y\| = \|x + y\|$. Questo ci ricorda un altro teorema che abbiamo imparato da piccoli (anche se meno famoso), il teorema del parallelogrammo.

Date: April 2, 2021.

[1]Se non lo sapete guardate su un libro di algebra, oppure, se vi basta una idea superficiale, vedete wikipedia.

Definition 1. *Dato un spazio vettoriale normato $\mathbb{V}$ sui reali o i complessi si dice che la norma soddisfa la regola del parallelogrammo se, per ogni $x, y \in \mathbb{V}$*

$$2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 = \|x-y\|^2 + \|x+y\|^2.$$

Problem 2.1. *In $\mathbb{R}^2$ il teorema di Pitagora e quello del parallelogrammo sono equivalenti.*[2]

Ne segue che il teorema di Pitagora è valido in astratto solo se la norma soddisfa la regola del parallelogramma. Ma se Pitagora è valido possiamo definire la proiezione ortogonale e quindi il prodotto scalare. Un poco di geometria mostra che un buon candiato per un prodotto scalare reale è

$$\langle x, y\rangle = \frac{\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2}{4}. \tag{2.1}$$

Certo, a prima vista la regola sembra strana ma risulta più naturale di quello che sembra,

Lemma 2.2. *Il prodotto scalare* (2.1) *è simmetrico e bilineare.*

Proof. La simmetria è ovvia. Vediamo la linearità. Dati $x, y, z \in \mathbb{V}$ vogliamo dimostrare che

$$\langle x+y, z\rangle = \langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle.$$

A questo scopo notiamo che

$$\begin{aligned}\|x+y+z\|^2 &= -\|x+z-y\|^2 + 2\|x+z\|^2 + 2\|y\|^2\\ \|x+y+z\|^2 &= -\|y+z-x\|^2 + 2\|y+z\|^2 + 2\|x\|^2.\end{aligned} \tag{2.2}$$

Facendo la media e sostituendo z con $-z$ si ha

$$\begin{aligned}\|x+y+z\|^2 - \|x+y-z\|^2 &= -\frac{1}{2}\|x+z-y\|^2 - \frac{1}{2}\|y+z-x\|^2 + \|x+z\|^2\\ &+ \|y+z\|^2 + \frac{1}{2}\|x-z-y\|^2 + \frac{1}{2}\|y-z-x\|^2 - \|x-z\|^2 - \|y-z\|^2\\ &= \|x+z\|^2 - \|x-z\|^2 + \|y+z\|^2 - \|y-z\|^2\end{aligned}$$

da cui (2.2) segue per definizione. □

Si noti che il Lemma precedente implica che per ogni $p \in \mathbb{N}$

$$\langle px, y\rangle = p\langle x, y\rangle.$$

Da cui seque che $p\langle \frac{1}{p}x, y\rangle = \langle x, y\rangle$. Inoltre $0 = \langle 0, y\rangle = \langle x, y\rangle + \langle -x, y\rangle$ da cui segue $\langle -x, y\rangle = -\langle x, y\rangle$. Unendo tutte queste considerazioni si ha che $\langle \lambda x, y\rangle = \lambda\langle x, y\rangle$ per ogni $x, y \in \mathbb{V}$ e $\lambda \in \mathbb{Q}$. La proprietà che per ogni $x, y \in \mathbb{V}$ e $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\langle \lambda x, y\rangle = \lambda\langle x, y\rangle$$

segue dal seguente Lemma.

Lemma 2.3. *La funzione $\langle \cdot, \cdot\rangle : \mathbb{V}^2 \to \mathbb{R}$ è continua.*

---

[2] Suggerimento: Si considerino i vettori x, y e sia ax la proiezione ortogonale di y su x e sia $h\|x\|_2 = \|y - ax\|_2$. Per semplicità si ponga $b = 1 - a$ e si mostri, usando la geometria elementare, che $(a^2 + b^2)\|x\|_2^2 = \|y^2\|_2$, $(b^2 + h^2)\|x\|_2^2 = \|y - x\|_2^2$, $(a+1)^2\|x\|_2^2 + h^2\|x\|_2^2 = \|x + y\|^2$. Si deduca da ciò l'equivalenza.

Proof. Si consideri una successione $\{x_n\}$ che converge a $x \in \mathbb{V}$. Allora, per ogni $y \in \mathbb{V}$

$$\begin{aligned}
&\|x_n + y\| = \|x + y + x_n - x\| \le \|x - y\| + \|x - x_n\| \\
&\|x - y\| \le \|x_n - y\| + \|x - x_n\|
\end{aligned}$$

thus

$$-\|x - x_n\| \le \|x - y\| - \|x_n - y\| \le \|x - x_n\|$$

che implica

$$\lim_{n\to\infty} \langle x_n, y\rangle = \lim_{n\to\infty} \frac{\|x_n + y\|^2 - \|x_n - y\|^2}{4} = \frac{\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2}{4} = \langle x, y\rangle.$$

□

Si noti inoltre che, per definizione $\langle x, x\rangle \ge 0$ e $\langle x, x\rangle = 0$ se e solo se $x = 0$.

D'altro canto se abbiamo una funzione simmetrica e bilineare $\langle\cdot,\cdot\rangle : \mathbb{V} \to \mathbb{R}$, $\mathbb{V}$ spazio vettoriale sul campo dei reali, tale che

(1) $\langle x, x\rangle \ge 0$ per ogni $x \in \mathbb{V}$
(2) $\langle x, x\rangle = 0$ se e solo se $x = 0$
(3) $\langle \lambda x, y\rangle = \lambda\langle x, y\rangle$ per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$ e $x, y \in \mathbb{V}$.

allora possiamo define la funzione $\|\cdot\| : \mathbb{V} \to \mathbb{R}_+$ come

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, y\rangle}. \tag{2.3}$$

Lemma 2.4 (Disuguaglianza di Schwarz)**.** *Per ogni $x, y \in \mathbb{V}$ si ha*

$$|\langle x, y\rangle| \le \|x\|\|y\|$$

Proof. Si noti che, per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$0 \le \|x + \lambda y\|^2 = \|x\|^2 - 2\lambda\langle x, y\rangle + \lambda^2\|y\|^2,$$

cosa possibile solo se l'enunciato del Lemma è vero. □

Problem 2.5. *Si mostri che $\|\cdot\|$ è una norma.*

Problem 2.6. *Si mostri che $\|\cdot\|$ soddisfa la regola del parallelogramma.*

Problem 2.7. *Si mostri che se la norma soddisfa la regola del parallelogramma, allora il rettangolo di vertici $0, x, y$ è retto se e solo se $\langle x, y\rangle = 0$.*

Problem 2.8. *Si sviluppi una teoria analoga per il caso di spazi vettoriali sul campo dei complessi.*

Carlangelo Liverani, Dipartimento di Matematica, II Università di Roma (Tor Vergata), Via della Ricerca Scientifica, 00133 Roma, Italy.
Email address: `liverani@mat.uniroma2.it`