NORME E PRODOTTI SCALARI

CARLANGELO LIVERANI

1. Spazi vettoriali normati

Assumo che sappiate cosa è una spazio vettoriale[1] Il primo concetto che vorremmo introdurre è quello di *lunghezza* di un vettore: la *norma*. Dato uno spazio vettoriale $\mathbb{V}$ su un campo K (siano i complessi o i reali) una norma è una funzione $\|\cdot\| : \mathbb{V} \to \mathbb{R}_+$ con le seguenti proprietà

(1) $\|v\| = 0 \Longrightarrow v = 0$
(2) $\|\lambda v\| = |\lambda|\|v\|$ per ogni $v \in \mathbb{V}$ e $\lambda \in K$
(3) $\|v + w\| \le \|v\| + \|w\|$ per ogni $v, w \in \mathbb{V}$.

Data una norma è naturale definire la *distanza* tra due vettori $x, y \in \mathbb{V}$ come $d(x, y) = \|x - y\|$.

Problem 1.1. *Si verifichi che d soddisfa la disuguaglianza triangolare.*

Problem 1.2. *Si mostri che per ogni $a, b \in \mathbb{R}$ e $t \in [0, 1]$ si ha*

$$e^{ta+(1-t)b} \le te^a + (1 - t)e^b,$$

ovvero e^x è una funzione convessa.

Theorem 1.3 (Hölder inequality)**.** *Si verifichi che, per ogni $n \in \mathbb{N}$ e $p \in (1, \infty)$, se definiamo, per $x \in \mathbb{R}^n$, $\|x\|_p = \left[\sum_{i=1}^n |x_i|^p\right]^{\frac{1}{p}}$ allora*

$$\left|\sum_{i=1} x_i y_i\right| \le \|x\|_p \|y\|_q$$

dove $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Proof. Si supponga che $\|x\|_p = \|y\|_q = 1$ dove $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Allora, per la convessità dell'esponenziale,

$$\begin{aligned}\left|\sum_{i=1} x_i y_i\right| &\le \sum_{i=1} |x_i|\,|y_i| = \sum_{i=1} e^{\frac{1}{p}\ln|x_i|^p + \frac{1}{q}\ln|y_i|^q} \le \sum_{i=1}^n \frac{1}{p} e^{\ln|x_i|^p} + \frac{1}{q} e^{\ln|y_i|^q}\\ &= \sum_{i=1}^n \frac{1}{p}|x_i|^p + \frac{1}{q}|y_i|^q = \frac{1}{p}\|x\|_p^p + \frac{1}{q}\|y\|_q^q = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1\end{aligned}$$

Questo implica che per ogni $x, y \in \mathbb{R}^n$ si ha

$$\left|\sum_{i=1} x_i y_i\right| \le \|x\|_p \|y\|_q.$$

Date: April 12, 2022.

[1] Se non lo sapete guardate su un libro di algebra, oppure, se vi basta una idea superficiale, vedete wikipedia.

□

Theorem 1.4. *Si verifichi che, per ogni $n \in \mathbb{N}$ e $p \in (1, \infty)$, se definiamo, per $x \in \mathbb{R}^n$, $\|x\|_p = \left[\sum_{i=1}^n |x_i|^p\right]^{\frac{1}{p}}$ allora $\|\cdot\|_p$ è una norma.*

Proof. L'unica cosa non ovvia è la disugauglianza triangolare. Si supponga che $x, y \in \mathbb{R}^d$ allora se $\|x+y\|_p = 0$ la disuguaglianza è ovvia, altrimenti

$$\sum_{i=1}^n |x_i + y_i|^p \leq \sum_{i=1}^n |x_i|\,|x_i+y_i|^{p-1} + |y_i|\,|x_i+y_i|^{p-1}$$

Per la disuguaglianza di Hölder si ha

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^n |x_i + y_i|^p &\leq \left[\sum_{i=1}^n |x_i|^p\right]^{\frac{1}{p}} \left[\sum_{i=1}^n |x_i+y_i|^{(p-1)q}\right]^{\frac{1}{q}} + \left[\sum_{i=1}^n |y_i|^p\right]^{\frac{1}{p}} \left[\sum_{i=1}^n |x_i+y_i|^{(p-1)q}\right]^{\frac{1}{q}} \\ &= \{\|x_i\|_p + \|y\|_p\} \left[\sum_{i=1}^n |x_i+y_i|^p\right]^{\frac{1}{q}}\end{aligned}$$

dividento ambo i membri per $[\sum_{i=1}^n |x_i+y_i|^p]^{\frac{1}{q}}$ si ha il risultato voluto. □

Problem 1.5. *Si verifichi che se definiamo, per $x \in \mathbb{R}^n$, $\|x\|_\infty = \sup_{i=1}^n |x_i|$ allora $\|\cdot\|_\infty$ è una norma.*

Problem 1.6. *Si verifichi che se definiamo, per $x \in \mathbb{R}^n$, $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$ allora $\|\cdot\|_1$ è una norma.*

Problem 1.7. *Si verifichi che tutte le affermazioni precedenti sono valide anche in $\mathbb{C}^n$.*

2. Pitagora

Un teorema fondamentale in geometria che abbiamo imparato da piccoli è il teorema di Pitagora per i triangoli rettangoli. Sarebbe bello avere un teorema del genere su spazi vettoriali astratti ma ci scontriamo con un problema di base: cosa è (in astratto) un triangolo rettangolo e, più in generale, cosa è un angolo?

La cosa non è ovvia. Il promo passo sarebbe se riuscissimo a dire cosa è un triangolo rettangolo senza fare riferimento agli angoli.

Dati $x, y \in \mathbb{R}^2$ un poco di geometria mostra che il triangolo di vertici $0, x, y$ è rettangolo solo se $\|x-y\|_2 = \|x+y\|_2$ (ovvero le diagonali del quadrilatero di vertici $0, x, x+y, y$ sono lunghe uguali). Possiamo quindi decidere che il triangolo di vertici $0, x, y$ in uno spazio vettoriale normato è rettangolo se e solo se $\|x-y\| = \|x+y\|$. Questo ci ricorda un altro teorema che abbiamo imparato da piccoli (anche se meno famoso), il teorema del parallelogrammo.

Definition 1. *Dato un spazio vettoriale normato $\mathbb{V}$ sui reali o i complessi si dice che la norma soddisfa la regola del parallelogrammo se, per ogni $x, y \in \mathbb{V}$*

$$2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 = \|x-y\|^2 + \|x+y\|^2.$$

Problem 2.1. *In $\mathbb{R}^2$ il teorema di Pitagora e quello del parallelogrammo sono equivalenti.*[2]

Ne segue che il teorema di Pitagora è valido in astratto solo se la norma soddisfa la regola del parallelogramma. Ma se Pitagora è valido possiamo definire la proiezione ortogonale e quindi il prodotto scalare. Un poco di geometria mostra che un buon candiato per un prodotto scalare reale è

$$\langle x, y\rangle = \frac{\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2}{4}. \tag{2.1}$$

Certo, a prima vista la regola sembra strana ma risulta più naturale di quello che sembra,

Lemma 2.2. *Il prodotto scalare* (2.1) *è simmetrico e bilineare.*

Proof. La simmetria è ovvia. Vediamo la linearità. Dati $x, y, z \in \mathbb{V}$ vogliamo dimostrare che

$$\langle x+y, z\rangle = \langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle.$$

A questo scopo notiamo che

$$\begin{aligned} \|x+y+z\|^2 &= -\|x+z-y\|^2 + 2\|x+z\|^2 + 2\|y\|^2 \\ \|x+y+z\|^2 &= -\|y+z-x\|^2 + 2\|y+z\|^2 + 2\|x\|^2. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Facendo la media e sostituendo z con $-z$ si ha

$$\begin{aligned} \|x+y+z\|^2 - \|x+y-z\|^2 &= -\frac{1}{2}\|x+z-y\|^2 - \frac{1}{2}\|y+z-x\|^2 + \|x+z\|^2 \\ &+ \|y+z\|^2 + \frac{1}{2}\|x-z-y\|^2 + \frac{1}{2}\|y-z-x\|^2 - \|x-z\|^2 - \|y-z\|^2 \\ &= \|x+z\|^2 - \|x-z\|^2 + \|y+z\|^2 - \|y-z\|^2 \end{aligned}$$

da cui (2.2) segue per definizione. □

Si noti che il Lemma precedente implica che per ogni $p \in \mathbb{N}$

$$\langle px, y\rangle = p\langle x, y\rangle.$$

Da cui seque che $p\langle \frac{1}{p}x, y\rangle = \langle x, y\rangle$. Inoltre $0 = \langle 0, y\rangle = \langle x, y\rangle + \langle -x, y\rangle$ da cui segue $\langle -x, y\rangle = -\langle x, y\rangle$. Unendo tutte queste considerazioni si ha che $\langle \lambda x, y\rangle = \lambda\langle x, y\rangle$ per ogni $x, y \in \mathbb{V}$ e $\lambda \in \mathbb{Q}$. La proprietà che per ogni $x, y \in \mathbb{V}$ e $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\langle \lambda x, y\rangle = \lambda\langle x, y\rangle$$

segue dal seguente Lemma.

Lemma 2.3. *La funzione $\langle \cdot, \cdot\rangle : \mathbb{V}^2 \to \mathbb{R}$ è continua.*

Proof. Si consideri una successione $\{x_n\}$ che converge a $x \in \mathbb{V}$. Allora, per ogni $y \in \mathbb{V}$

$$\begin{aligned} &\|x_n + y\| = \|x + y + x_n - x\| \leq \|x - y\| + \|x - x_n\| \\ &\|x - y\| \leq \|x_n - y\| + \|x - x_n\| \end{aligned}$$

[2] Suggerimento: Si considerino i vettori x, y e sia ax la proiezione ortogonale di y su x e sia $h\|x\|_2 = \|y - ax\|_2$. Per semplicità si ponga $b = 1 - a$ e si mostri, usando la geometria elementare, che $(a^2 + b^2)\|x\|_2^2 = \|y^2\|_2$, $(b^2 + h^2)\|x\|_2^2 = \|y - x\|_2^2$, $(a + 1)^2\|x\|_2^2 + h^2\|x\|_2^2 = \|x + y\|^2$. Si deduca da ciò l'equivalenza.

quindi

$$-\|x - x_n\| \le \|x - y\| - \|x_n - y\| \le \|x - x_n\|$$

che implica

$$\lim_{n\to\infty} \langle x_n, y\rangle = \lim_{n\to\infty} \frac{\|x_n + y\|^2 - \|x_n - y\|^2}{4} = \frac{\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2}{4} = \langle x, y\rangle.$$

□

Si noti inoltre che, per definizione $\langle x, x\rangle \ge 0$ e $\langle x, x\rangle = 0$ se e solo se $x = 0$.

D'altro canto se abbiamo una funzione simmetrica e bilineare $\langle \cdot, \cdot\rangle : \mathbb{V} \to \mathbb{R}$, $\mathbb{V}$ spazio vettoriale sul campo dei reali, tale che

(1) $\langle x, x\rangle \ge 0$ per ogni $x \in \mathbb{V}$
(2) $\langle x, x\rangle = 0$ se e solo se $x = 0$
(3) $\langle \lambda x, y\rangle = \lambda\langle x, y\rangle$ per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$ e $x, y \in \mathbb{V}$.

allora possiamo define la funzione $\|\cdot\| : \mathbb{V} \to \mathbb{R}_+$ come

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, y\rangle}. \tag{2.3}$$

Lemma 2.4 (Disuguaglianza di Schwarz)**.** *Per ogni $x, y \in \mathbb{V}$ si ha*

$$|\langle x, y\rangle| \le \|x\|\|y\|$$

Proof. Si noti che, per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$0 \le \|x + \lambda y\|^2 = \|x\|^2 - 2\lambda\langle x, y\rangle + \lambda^2\|y\|^2,$$

cosa possibile solo se l'enunciato del Lemma è vero. □

Problem 2.5. *Si mostri che $\|\cdot\|$ è una norma.*

Problem 2.6. *Si mostri che $\|\cdot\|$ soddisfa la regola del parallelogramma.*

Problem 2.7. *Si mostri che se la norma soddisfa la regola del parallelogramma, allora il rettangolo di vertici $0, x, y$ è retto se e solo se $\langle x, y\rangle = 0$.*

Problem 2.8. *Si sviluppi una teoria analoga per il caso di spazi vettoriali sul campo dei complessi.*

3. Dimensioni

Dato uno spazio vettoriale $\mathbb{V}$ su un campo K, si ricordi che un insieme di vettori $\{v_i\} \subset \mathbb{V}$ si dice *linearmente indipendente* se $\sum_i \lambda_i v_i = 0$, $\lambda_i \in K$, implica $\lambda_i = 0$. Mentre una *base* è un insieme di vettori $\{v_i\} \subset \mathbb{V}$ lineramente indipendenti tali che ogni vettore $v \in \mathbb{V}$ si può scrivere come $v = \sum_i \lambda_i v_i$ per certi $\lambda_i \in K$.

Problem 3.1. *Si mostri che i λ_i sono univocamente determinati.*

Problem 3.2. *Si mostri che se uno spazio vettoriale $\mathbb{V}$ ha una base che consiste di d elementi, allora tutte le basi hanno esattamente d elementi.*

Il numero di elementi di una base si dice *dimensione dello sapzio* $\mathbb{V}$.

La prima sorpresa della teoria astratta degli spazi vettoriali è che possono avere dimensione infinita.

Facciamo un esempio: dato un insieme A possiamo considerare l'insieme di tutte le funzioni da A a $\mathbb{R}$, denotato come $\mathbb{R}^A$. Date due funzioni $f, g \in \mathbb{R}^A$ possiamo definire la somma come $(f + g)(a) = f(a) + g(a)$, per ogni $a \in A$ e il prodotto per uno scalare come $(\lambda \cdot f)(a) = \lambda \cdot f(a)$.

Problem 3.3. *Si verifichi che abbiamo appena definito uno spazio vettoriale.*

Per ogni $a \in A$ possiamo poi definire la funzione

$$e_a(b) = \begin{cases} 0 & \text{se } b \neq a \\ 1 & \text{se } b = a. \end{cases}$$

Problem 3.4. *Si verifichi che* $\{e_a\}_{a\in A}$ *forma una base di* $\mathbb{R}^A$.

Ne segue che se A contiene infiniti elementi, allora $\mathbb{R}^A$ ha dimensione infinita.

Troppo astratto? Allora consideriamo $\mathbb{V} = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, ovvero lo spazio di tutte le funzioni da $\mathbb{N}$ a $\mathbb{R}$. Tali funzioni si possono scrivere come la lista $(v_1, v_2, \dots, v_n, \dots)$ dove $v_i \in \mathbb{R}$ è il valore che la funzione assume sull'intero $i \in \mathbb{N}$. La struttura dello spazio vettoriale diventa $v + w = (v_1 + w_1, v_2 + w_2, \dots)$ e $\lambda v = (\lambda v_1, \lambda v_2, \dots)$.

Problem 3.5. *Si verifichi che* $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ *è uno spazio vettoriale infinito dimensionale.*

Problem 3.6. *Si verifichi che* $\ell^p = \{v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \ : \ \sum_{i\in\mathbb{N}} |v_i|^p < \infty\}$, $p \geq 1$, *e* $\ell^\infty = \{v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \ : \ \sup_{i\in\mathbb{N}} |v_i| < \infty\}$ *sono spazi vettoriali.*

Problem 3.7. *Si verifichi, seguendo gli argomenti dei Teoremi 1.3 e 1.4, che* $\|v\|_p = \left[\sum_{i\in\mathbb{N}} |v_i|^p\right]^{\frac{1}{p}}$ *è una norma su* ℓ^p *per* $p \geq 1$.

Problem 3.8. *Si verifichi che* $\|v\|_\infty = \sup_{i\in\mathbb{N}} |v_i|$ *è una norma su* ℓ^∞.

Problem 3.9. *Si verifichi che* $\|v\|_2$ *verifica la uguaglianza del parallelogrammo e si scriva il corrispondente prodotto scalare.*

Uno spazio normato e completo si dice di Banach, uno sapzio di Banach in cui la norma soddisfa l'uguglianza del parallelogrammo si dice di Hilbert.

Theorem 3.10. *Gli spazi* ℓ^p, $p \geq 1$, *sono spazi di Banach.* ℓ^2 *è uno spazio di Hilbert.*

Proof. Si noti che

$$|v_i| \leq \|v\|_p.$$

Ne segue che se $\{v_n\} \subset \ell^p$ è una successione di Cauchy, allora ogni componente $(v_n)_i$ è una successione di Cauchy in $\mathbb{R}$. Ma $\mathbb{R}$ è uno spazio completo, quindi esiste $\bar{v}_i = \lim_{n\to\infty}(v_n)_i$. Verifichiamo che $\bar{v} \in \ell^p$. Per ogni $m \in \mathbb{N}$ si ha

$$\sum_{i=1}^m |\bar{v}_i|^p = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^m |(v_n)_i|^p \leq \lim_{n\to\infty} \|v_n\|_p^p < \infty$$

e il risultato segue prendendo il limite per $m \to \infty$. D'altro canto

$$\begin{aligned}\left[\sum_{i=1}^m |\bar{v}_i - (v_n)_i|^p\right]^{\frac{1}{p}} &\leq \left[\sum_{i=1}^m |\bar{v}_i - (v_s)_i|^p\right]^{\frac{1}{p}} + \left[\sum_{i=1}^m |(v_s)_i - (v_n)_i|^p\right]^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \left[\sum_{i=1}^m |\bar{v}_i - (v_s)_i|^p\right]^{\frac{1}{p}} + \|v_s - v_n\|_p.\end{aligned}$$

Per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che $\|v_s - v_n\|_p < \varepsilon/2$ per ogni $n, s \geq \bar{n}$ (poichè la successione è di Chauchy). Inoltre, per ogni m esiste $\bar{s} \in \mathbb{N}$ tale che

$[\sum_{i=1}^m |\bar v_i - (v_s)_i|^p]^{\frac1p} < \varepsilon/2$ per ogni $s \geq \bar s$. Quinidi, per $n \geq \bar n$ e $m \in \mathbb{N}$ si ha

$$\left[\sum_{i=1}^m |\bar v_i - (v_n)_i|^p\right]^{\frac1p} \leq \varepsilon.$$

Prendendo il limite per $m \to \infty$, segue che $\|\bar v - v_n\|_p < \varepsilon$ per ogni $n \geq \bar n$. Ovvero, $\lim_{n\to\infty} v_n = \bar v$. Il resto del teorema segue facilmente. □

Problem 3.11. *Si mostri il Teorema 3.10 nel caso $p = \infty$.*

4. Spazi duali

Dati due spazi di Banach $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ e una funzione lineare $f : \mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}_2$, la diremo *limitata* se[3]

$$\|f\| := \sup_{\|v\|_{\mathcal{B}_1}\leq 1} \|f(v)\|_{\mathcal{B}_2} < \infty.$$

Chiameremo $L(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)$ l'insieme delle funzioni lineari limitate da $\mathcal{B}_1$ a $\mathcal{B}_2$.

Problem 4.1. *Si mostri che $L(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)$ è uno spazio lineare.*

Problem 4.2. *Si mostri che $\|\cdot\|$ è una norma in $L(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)$.*

Problem 4.3. *Si mostri che $L(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)$ è uno spazio di Banach.*

Problem 4.4. *Si mostri che se $f \in L(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)$ allora f è una funzione continua da $\mathcal{B}_1$ a $\mathcal{B}_2$.*

Dato uno spazio di Banach $\mathcal{B}$ sui reali (o sui complessi) chiamiamo *spazio duale* lo spazio $\mathcal{B}' := L(\mathcal{B}, \mathbb{R})$ (o $L(\mathcal{B}, \mathbb{C})$).

Theorem 4.5. *Per ogni $p > 1$, si ha $(\ell^p)' = \ell^q$, dove $\frac1p + \frac1q = 1$.*

Proof. Sia $\alpha \in \ell^q$ allora possiamo definire $f(v) = \sum_{i\in\mathbb{N}} \alpha_i v_i$. Dalla disuguaglianza di Hölder segue

$$|f(v)| \leq \|\alpha\|_q \|v\|_p$$

ovvero $f \in (\ell^p)'$. Ne segue che $\|f\| \leq \|\alpha\|_q$ e $\ell^q \subset (\ell^p)'$. D'altro canto se $f \in (\ell^p)'$ possiamo definire $\alpha_i = f(e_i)$. Dato $m \in \mathbb{N}$ sia

$$(v^m)_i = \begin{cases} \operatorname{sign}\alpha_i |\alpha_i|^{\frac{1}{p-1}} & \text{se } i \leq m \\ 0 & \text{se } i > m. \end{cases}$$

Allora,

$$\|f\| \geq \frac{|f(v^m)|}{\|v^m\|_p} = \frac{\sum_{i=1}^m |\alpha_i|^{\frac{p}{p-1}}}{\left[\sum_{i=1}^m |\alpha_i|^{\frac{p}{p-1}}\right]^{\frac1p}} = \left[\sum_{i=1}^m |\alpha_i|^q\right]^{\frac1q}.$$

Dall'arbitrarietà di m segue $\|f\| \geq \|\alpha\|_q$ e quindi $(\ell^p)' \subset \ell^q$. Abbaimo quindi ottenuto che $\|f\| = \|\alpha\|_q$ e $(\ell^p)' = \ell^q$.[4] □

Problem 4.6. *Si mostri che $(\ell^1)' = \ell^\infty$ e $(\ell^\infty)' = \ell^1$.*

---

[3]Ovviamente $\|\cdot\|_{\mathcal{B}_i}$ è la norma dello spazio $\mathcal{B}_i$.

[4]Si noti che l'uguaglianza è nel senso che esiste una mappa lineare $\Psi : \ell^q \to (\ell^p)'$, iniettiva e suriettiva, tale che $\|\Psi(\alpha)\| = \|\alpha\|_q$ per ogni $\alpha \in \ell^q$. Ovvero i due spazi sono *isomorfi* come spazi di Banach.

Carlangelo Liverani, Dipartimento di Matematica, II Università di Roma (Tor Vergata), Via della Ricerca Scientifica, 00133 Roma, Italy.
Email address: liverani@mat.uniroma2.it