

NORME E PRODOTTI SCALARI

CARLANGELLO LIVERANI

1. SPAZI VETTORIALI NORMATI

Assumo che sappiate cosa è uno spazio vettoriale¹. Il primo concetto che vorremmo introdurre è quello di *lunghezza* di un vettore: la *norma*. Dato uno spazio vettoriale $\mathbb{V}$ su un campo K (siano i complessi o i reali) una norma è una funzione $\|\cdot\| : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{R}_+$ con le seguenti proprietà

- (1) $\|v\| = 0 \implies v = 0$
- (2) $\|\lambda v\| = |\lambda| \|v\|$ per ogni $v \in \mathbb{V}$ e $\lambda \in K$
- (3) $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$ per ogni $v, w \in \mathbb{V}$.

Data una norma è naturale definire la *distanza* tra due vettori $x, y \in \mathbb{V}$ come $d(x, y) = \|x - y\|$.

Problem 1.1. *Si verifichi che d soddisfa la disuguaglianza triangolare.*

Problem 1.2. *Si mostri che per ogni $a, b \in \mathbb{R}$ e $t \in [0, 1]$ si ha*

$$e^{ta+(1-t)b} \leq te^a + (1-t)e^b,$$

ovvero e^x è una funzione convessa.

Theorem 1.3 (Hölder inequality). *Si verifichi che, per ogni $n \in \mathbb{N}$ e $p \in (1, \infty)$, se definiamo, per $x \in \mathbb{R}^n$, $\|x\|_p = \left[\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right]^{\frac{1}{p}}$ allora*

$$\left| \sum_{i=1}^n x_i y_i \right| \leq \|x\|_p \|y\|_q$$

dove $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Proof. Si supponga che $\|x\|_p = \|y\|_q = 1$ dove $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Allora, per la convessità dell'esponenziale,

$$\begin{aligned} \left| \sum_{i=1}^n x_i y_i \right| &\leq \sum_{i=1}^n |x_i| |y_i| = \sum_{i=1}^n e^{\frac{1}{p} \ln |x_i|^p + \frac{1}{q} \ln |y_i|^q} \leq \sum_{i=1}^n \frac{1}{p} e^{\ln |x_i|^p} + \frac{1}{q} e^{\ln |y_i|^q} \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{1}{p} |x_i|^p + \frac{1}{q} |y_i|^q = \frac{1}{p} \|x\|_p^p + \frac{1}{q} \|y\|_q^q = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \end{aligned}$$

Questo implica che per ogni $x, y \in \mathbb{R}^n$ si ha

$$\left| \sum_{i=1}^n x_i y_i \right| \leq \|x\|_p \|y\|_q.$$

Date: April 4, 2023.

¹Se non lo sapete guardate su un libro di algebra, oppure, se vi basta una idea superficiale, vedete [wikipedia](https://en.wikipedia.org/wiki/Vector_space).

□

Theorem 1.4. *Si verifichi che, per ogni $n \in \mathbb{N}$ e $p \in (1, \infty)$, se definiamo, per $x \in \mathbb{R}^n$, $\|x\|_p = \left[\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right]^{\frac{1}{p}}$ allora $\|\cdot\|_p$ è una norma.*

Proof. L'unica cosa non ovvia è la disuguaglianza triangolare. Si supponga che $x, y \in \mathbb{R}^d$ allora se $\|x + y\|_p = 0$ la disuguaglianza è ovvia, altrimenti

$$\sum_{i=1}^n |x_i + y_i|^p \leq \sum_{i=1}^n |x_i| |x_i + y_i|^{p-1} + |y_i| |x_i + y_i|^{p-1}$$

Per la disuguaglianza di Hölder si ha

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n |x_i + y_i|^p &\leq \left[\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right]^{\frac{1}{p}} \left[\sum_{i=1}^n |x_i + y_i|^{(p-1)q} \right]^{\frac{1}{q}} + \left[\sum_{i=1}^n |y_i|^p \right]^{\frac{1}{p}} \left[\sum_{i=1}^n |x_i + y_i|^{(p-1)q} \right]^{\frac{1}{q}} \\ &= \{\|x\|_p + \|y\|_p\} \left[\sum_{i=1}^n |x_i + y_i|^p \right]^{\frac{1}{q}} \end{aligned}$$

dividendo ambo i membri per $\left[\sum_{i=1}^n |x_i + y_i|^p \right]^{\frac{1}{q}}$ si ha il risultato voluto. □

Problem 1.5. *Si verifichi che se definiamo, per $x \in \mathbb{R}^n$, $\|x\|_\infty = \sup_{i=1}^n |x_i|$ allora $\|\cdot\|_\infty$ è una norma.*

Problem 1.6. *Si verifichi che se definiamo, per $x \in \mathbb{R}^n$, $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$ allora $\|\cdot\|_1$ è una norma.*

Problem 1.7. *Si verifichi che tutte le affermazioni precedenti sono valide anche in $\mathbb{C}^n$.*

2. PITAGORA

Un teorema fondamentale in geometria che abbiamo imparato da piccoli è il teorema di Pitagora per i triangoli rettangoli. Sarebbe bello avere un teorema del genere su spazi vettoriali astratti ma ci scontriamo con un problema di base: cosa è (in astratto) un triangolo rettangolo e, più in generale, cosa è un angolo?

La cosa non è ovvia. Il primo passo sarebbe se riuscissimo a dire cosa è un triangolo rettangolo senza fare riferimento agli angoli.

Dati $x, y \in \mathbb{R}^2$ un poco di geometria mostra che il triangolo di vertici $0, x, y$ è rettangolo solo se $\|x - y\|_2 = \|x + y\|_2$ (ovvero le diagonali del quadrilatero di vertici $0, x, x + y, y$ sono lunghe uguali). Possiamo quindi decidere che il triangolo di vertici $0, x, y$ in uno spazio vettoriale normato è rettangolo se e solo se $\|x - y\| = \|x + y\|$. Questo ci ricorda un altro teorema che abbiamo imparato da piccoli (anche se meno famoso), il teorema del parallelogrammo.

Definition 1. *Dato un spazio vettoriale normato $\mathbb{V}$ sui reali o i complessi si dice che la norma soddisfa la regola del parallelogrammo se, per ogni $x, y \in \mathbb{V}$*

$$2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 = \|x - y\|^2 + \|x + y\|^2.$$

Problem 2.1. In $\mathbb{R}^2$ il teorema di Pitagora e quello del parallelogramma sono equivalenti.²

Ne segue che il teorema di Pitagora è valido in astratto solo se la norma soddisfa la regola del parallelogramma. Ma se Pitagora è valido possiamo definire la proiezione ortogonale e quindi il prodotto scalare. Un poco di geometria mostra che un buon candidato per un prodotto scalare reale è

$$(2.1) \quad \langle x, y \rangle = \frac{\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2}{4}.$$

Certo, a prima vista la regola sembra strana ma risulta più naturale di quello che sembra,

Lemma 2.2. Il prodotto scalare (2.1) è simmetrico e bilineare.

Proof. La simmetria è ovvia. Vediamo la linearità. Dati $x, y, z \in \mathbb{V}$ vogliamo dimostrare che

$$(2.2) \quad \langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle.$$

A questo scopo notiamo che

$$\begin{aligned} \|x + y + z\|^2 &= -\|x + z - y\|^2 + 2\|x + z\|^2 + 2\|y\|^2 \\ \|x + y + z\|^2 &= -\|y + z - x\|^2 + 2\|y + z\|^2 + 2\|x\|^2. \end{aligned}$$

Facendo la media e sostituendo z con $-z$ si ha

$$\begin{aligned} \|x + y + z\|^2 - \|x + y - z\|^2 &= -\frac{1}{2}\|x + z - y\|^2 - \frac{1}{2}\|y + z - x\|^2 + \|x + z\|^2 \\ &\quad + \|y + z\|^2 + \frac{1}{2}\|x - z - y\|^2 + \frac{1}{2}\|y - z - x\|^2 - \|x - z\|^2 - \|y - z\|^2 \\ &= \|x + z\|^2 - \|x - z\|^2 + \|y + z\|^2 - \|y - z\|^2 \end{aligned}$$

da cui (2.2) segue per definizione. $\square$

Si noti che il Lemma precedente implica che per ogni $p \in \mathbb{N}$

$$\langle px, y \rangle = p\langle x, y \rangle.$$

Da cui segue che $p\langle \frac{1}{p}x, y \rangle = \langle x, y \rangle$. Inoltre $0 = \langle 0, y \rangle = \langle x, y \rangle + \langle -x, y \rangle$ da cui segue $\langle -x, y \rangle = -\langle x, y \rangle$. Unendo tutte queste considerazioni si ha che $\langle \lambda x, y \rangle = \lambda\langle x, y \rangle$ per ogni $x, y \in \mathbb{V}$ e $\lambda \in \mathbb{Q}$. La proprietà che per ogni $x, y \in \mathbb{V}$ e $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\langle \lambda x, y \rangle = \lambda\langle x, y \rangle$$

segue dal seguente Lemma.

Lemma 2.3. La funzione $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{V}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ è continua.

Proof. Si consideri una successione $\{x_n\}$ che converge a $x \in \mathbb{V}$. Allora, per ogni $y \in \mathbb{V}$

$$\begin{aligned} \|x_n + y\| &= \|x + y + x_n - x\| \leq \|x - y\| + \|x - x_n\| \\ \|x - y\| &\leq \|x_n - y\| + \|x - x_n\| \end{aligned}$$

²Suggerimento: Si considerino i vettori x, y e sia ax la proiezione ortogonale di y su x e sia $h\|x\|_2 = \|y - ax\|_2$. Per semplicità si ponga $b = 1 - a$ e si mostri, usando la geometria elementare, che $(a^2 + b^2)\|x\|_2^2 = \|y\|_2^2$, $(b^2 + h^2)\|x\|_2^2 = \|y - x\|_2^2$, $(a + 1)^2\|x\|_2^2 + h^2\|x\|_2^2 = \|x + y\|^2$. Si deduca da ciò l'equivalenza.

quindi

$$-\|x - x_n\| \leq \|x - y\| - \|x_n - y\| \leq \|x - x_n\|$$

che implica

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle x_n, y \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\|x_n + y\|^2 - \|x_n - y\|^2}{4} = \frac{\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2}{4} = \langle x, y \rangle.$$

□

Si noti inoltre che, per definizione $\langle x, x \rangle \geq 0$ e $\langle x, x \rangle = 0$ se e solo se $x = 0$.

D'altro canto se abbiamo una funzione simmetrica e bilineare $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{R}$, $\mathbb{V}$ spazio vettoriale sul campo dei reali, tale che

- (1) $\langle x, x \rangle \geq 0$ per ogni $x \in \mathbb{V}$
- (2) $\langle x, x \rangle = 0$ se e solo se $x = 0$
- (3) $\langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle$ per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$ e $x, y \in \mathbb{V}$.

allora possiamo definire la funzione $\|\cdot\| : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{R}_+$ come

$$(2.3) \quad \|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}.$$

Lemma 2.4 (Disuguaglianza di Schwarz). *Per ogni $x, y \in \mathbb{V}$ si ha*

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|$$

Proof. Si noti che, per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$0 \leq \|x + \lambda y\|^2 = \|x\|^2 - 2\lambda \langle x, y \rangle + \lambda^2 \|y\|^2,$$

cosa possibile solo se l'enunciato del Lemma è vero. □

Problem 2.5. *Si mostri che $\|\cdot\|$ è una norma.*

Problem 2.6. *Si mostri che $\|\cdot\|$ soddisfa la regola del parallelogramma.*

Problem 2.7. *Si mostri che se la norma soddisfa la regola del parallelogramma, allora il rettangolo di vertici $0, x, y$ è retto se e solo se $\langle x, y \rangle = 0$.*

Problem 2.8. *Si sviluppi una teoria analoga per il caso di spazi vettoriali sul campo dei complessi.*

3. DIMENSIONI

Dato uno spazio vettoriale $\mathbb{V}$ su un campo K , si ricordi che un insieme di vettori $\{v_i\} \subset \mathbb{V}$ si dice *linearmente indipendente* se $\sum_i \lambda_i v_i = 0$, $\lambda_i \in K$, implica $\lambda_i = 0$. Uno spazio normato e completo si dice di Banach, uno spazio di Banach in cui la norma soddisfa l'uguaglianza del parallelogramma si dice di Hilbert.

Se $\mathbb{V}$ è uno spazio di Banach, allora una *base* è un insieme di vettori $\{v_i\}_{i \in A} \subset \mathbb{V}$, $A \subset \mathbb{N}$, linearmente indipendenti tali che l'insieme dei vettori $\{\sum_i \lambda_i v_i : \lambda_i \in K\}$ è denso in $\mathbb{V}$.

Problem 3.1. *Si mostri che se $v = \sum_i \lambda_i v_i$ allora gli scalari λ_i sono univocamente determinati.*

Problem 3.2. *Si mostri che se uno spazio vettoriale $\mathbb{V}$ ha una base che consiste di d elementi, allora tutte le basi hanno esattamente d elementi.*

Il numero di elementi di una base si dice *dimensione dello spazio* $\mathbb{V}$.

La prima sorpresa della teoria astratta degli spazi vettoriali è che possono avere dimensione infinita.

Facciamo un esempio: dato un insieme A possiamo considerare l'insieme di tutte le funzioni da A a $\mathbb{R}$, denotato come $\mathbb{R}^A$. Date due funzioni $f, g \in \mathbb{R}^A$ possiamo definire la somma come $(f + g)(a) = f(a) + g(a)$, per ogni $a \in A$ e il prodotto per uno scalare come $(\lambda \cdot f)(a) = \lambda \cdot f(a)$. Si definisca inoltre la norma $\|f\| = \sup_a |f(a)|$.

Problem 3.3. *Si verifichi che abbiamo appena definito uno spazio di Banach.*

Per ogni $a \in A$ possiamo poi definire la funzione

$$e_a(b) = \begin{cases} 0 & \text{se } b \neq a \\ 1 & \text{se } b = a. \end{cases}$$

Problem 3.4. *Si verifichi che $\{e_a\}_{a \in A}$ forma un insieme linearmente indipendente di $\mathbb{R}^A$.*

Ne segue che se A contiene infiniti elementi, allora $\mathbb{R}^A$ ha dimensione infinita.

Troppo astratto? Allora consideriamo $\mathbb{V} = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, ovvero lo spazio di tutte le funzioni da $\mathbb{N}$ a $\mathbb{R}$. Tali funzioni si possono scrivere come la lista $(v_1, v_2, \dots, v_n, \dots)$ dove $v_i \in \mathbb{R}$ è il valore che la funzione assume sull'intero $i \in \mathbb{N}$. La struttura dello spazio vettoriale diventa $v + w = (v_1 + w_1, v_2 + w_2, \dots)$ e $\lambda v = (\lambda v_1, \lambda v_2, \dots)$.

Problem 3.5. *Si verifichi che $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ è uno spazio vettoriale infinito dimensionale.*

Problem 3.6. *Si verifichi che $\ell^p = \{v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \sum_{i \in \mathbb{N}} |v_i|^p < \infty\}$, $p \geq 1$, e $\ell^\infty = \{v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \sup_{i \in \mathbb{N}} |v_i| < \infty\}$ sono spazi vettoriali.*

Problem 3.7. *Si verifichi, seguendo gli argomenti dei Teoremi 1.3 e 1.4, che $\|v\|_p = [\sum_{i \in \mathbb{N}} |v_i|^p]^{\frac{1}{p}}$ è una norma su ℓ^p per $p \geq 1$.*

Problem 3.8. *Si verifichi che $\|v\|_\infty = \sup_{i \in \mathbb{N}} |v_i|$ è una norma su ℓ^∞ .*

Problem 3.9. *Si verifichi che $\|v\|_2$ verifica la uguaglianza del parallelogramma e si scriva il corrispondente prodotto scalare.*

Theorem 3.10. *Gli spazi ℓ^p , $p \geq 1$, sono spazi di Banach. ℓ^2 è uno spazio di Hilbert.*

Proof. Si noti che, per n sufficientemente grande,

$$\|v_n\|_p \leq \|v_{n_0}\|_p + \|v_{n_0} - v_n\|_p \leq \|v_{n_0}\|_p + \varepsilon$$

dunque $\sup_n \|v_n\|_p < \infty$. Inoltre, per ogni $n \in \mathbb{N}$,

$$|v_n| \leq \|v\|_p.$$

Ne segue che se $\{v_n\} \subset \ell^p$ è una successione di Cauchy, allora ogni componente $(v_n)_i$ è una successione di Cauchy in $\mathbb{R}$. Ma $\mathbb{R}$ è uno spazio completo, quindi esiste $\bar{v}_i = \lim_{n \rightarrow \infty} (v_n)_i$. Verifichiamo che $\bar{v} \in \ell^p$. Per ogni $m \in \mathbb{N}$ si ha

$$\sum_{i=1}^m |\bar{v}_i|^p = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^m |(v_n)_i|^p \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \|v_n\|_p^p < \infty$$

e il risultato segue prendendo il limite per $m \rightarrow \infty$. D'altro canto

$$\begin{aligned} \left[\sum_{i=1}^m |\bar{v}_i - (v_n)_i|^p \right]^{\frac{1}{p}} &\leq \left[\sum_{i=1}^m |\bar{v}_i - (v_s)_i|^p \right]^{\frac{1}{p}} + \left[\sum_{i=1}^m |(v_s)_i - (v_n)_i|^p \right]^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \left[\sum_{i=1}^m |\bar{v}_i - (v_s)_i|^p \right]^{\frac{1}{p}} + \|v_s - v_n\|_p. \end{aligned}$$

Per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che $\|v_s - v_n\|_p < \varepsilon/2$ per ogni $n, s \geq \bar{n}$ (poichè la successione è di Cauchy). Inoltre, per ogni m esiste $\bar{s} \in \mathbb{N}$ tale che $[\sum_{i=1}^m |\bar{v}_i - (v_s)_i|^p]^{\frac{1}{p}} < \varepsilon/2$ per ogni $s \geq \bar{s}$. Quindi, per $n \geq \bar{n}$ e $m \in \mathbb{N}$ si ha

$$\left[\sum_{i=1}^m |\bar{v}_i - (v_n)_i|^p \right]^{\frac{1}{p}} \leq \varepsilon.$$

Prendendo il limite per $m \rightarrow \infty$, segue che $\|\bar{v} - v_n\|_p < \varepsilon$ per ogni $n \geq \bar{n}$. Ovvero, $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n = \bar{v}$. Il resto del teorema segue facilmente. $\square$

Problem 3.11. Si mostri il Teorema 3.10 nel caso $p = \infty$.

4. SPAZI DUALI

Dati due spazi di Banach $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ e una funzione lineare $f : \mathcal{B}_1 \rightarrow \mathcal{B}_2$, la diremo *limitata* se³

$$\|f\| := \sup_{\|v\|_{\mathcal{B}_1} \leq 1} \|f(v)\|_{\mathcal{B}_2} < \infty.$$

Chiameremo $L(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)$ l'insieme delle funzioni lineari limitate da $\mathcal{B}_1$ a $\mathcal{B}_2$.

Problem 4.1. Si mostri che $L(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)$ è uno spazio lineare.

Problem 4.2. Si mostri che $\|\cdot\|$ è una norma in $L(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)$.

Problem 4.3. Si mostri che $L(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)$ è uno spazio di Banach.

Problem 4.4. Si mostri che se $f \in L(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)$ allora f è una funzione continua da $\mathcal{B}_1$ a $\mathcal{B}_2$.

Dato uno spazio di Banach $\mathcal{B}$ sui reali (o sui complessi) chiamiamo *spazio duale* lo spazio $\mathcal{B}' := L(\mathcal{B}, \mathbb{R})$ (o $L(\mathcal{B}, \mathbb{C})$).

Theorem 4.5. Per ogni $p > 1$, si ha $(\ell^p)' = \ell^q$, dove $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Proof. Sia $\alpha \in \ell^q$ allora possiamo definire $f(v) = \sum_{i \in \mathbb{N}} \alpha_i v_i$. Dalla disuguaglianza di Hölder segue

$$|f(v)| \leq \|\alpha\|_q \|v\|_p$$

ovvero $f \in (\ell^p)'$. Ne segue che $\|f\| \leq \|\alpha\|_q$ e $\ell^q \subset (\ell^p)'$. D'altro canto se $f \in (\ell^p)'$ possiamo definire $\alpha_i = f(e_i)$. Dato $m \in \mathbb{N}$ sia

$$(v^m)_i = \begin{cases} \text{sign } \alpha_i |\alpha_i|^{\frac{1}{p-1}} & \text{se } i \leq m \\ 0 & \text{se } i > m. \end{cases}$$

³Ovviamente $\|\cdot\|_{\mathcal{B}_i}$ è la norma dello spazio $\mathcal{B}_i$.

Allora,

$$\|f\| \geq \frac{|f(v^m)|}{\|v^m\|_p} = \frac{\sum_{i=1}^m |\alpha_i|^{\frac{p}{p-1}}}{\left[\sum_{i=1}^m |\alpha_i|^{\frac{p}{p-1}}\right]^{\frac{1}{p}}} = \left[\sum_{i=1}^m |\alpha_i|^q\right]^{\frac{1}{q}}.$$

Dall'arbitrarietà di m segue $\|f\| \geq \|\alpha\|_q$ e quindi $(\ell^p)' \subset \ell^q$. Abbiamo quindi ottenuto che $\|f\| = \|\alpha\|_q$ e $(\ell^p)' = \ell^q$.⁴ $\square$

Problem 4.6. *Si mostri che $(\ell^1)' = \ell^\infty$ e $(\ell^\infty)' = \ell^1$.*

CARLANGELO LIVERANI, DIPARTIMENTO DI MATEMATICA, II UNIVERSITÀ DI ROMA (TOR VERGATA), VIA DELLA RICERCA SCIENTIFICA, 00133 ROMA, ITALY.

Email address: `liverani@mat.uniroma2.it`

⁴Si noti che l'uguaglianza è nel senso che esiste una mappa lineare $\Psi : \ell^q \rightarrow (\ell^p)'$, iniettiva e suriettiva, tale che $\|\Psi(\alpha)\| = \|\alpha\|_q$ per ogni $\alpha \in \ell^q$. Ovvero i due spazi sono *isomorfi* come spazi di Banach.