

MECCANICA QUANTISTICA

CARLANGELLO LIVERANI

1. MECCANICA QUANTISTICA: UNA INTRODUZIONE ISTANTANEA E IRRITUALE

La Meccanica Quantistica è radicalmente diversa dalla meccanica classica e si basa sui seguenti principi:¹

- (1) *Lo spazio degli stati di un sistema è la palla unitaria di uno spazio di Hilbert sul campo dei complessi;*²
- (2) *gli osservabili sono gli operatori Hermitiani. Dato un osservabile A i possibili risultati di una misura sono gli elementi di $\sigma(A)$, lo spettro di A . Se $\{a_i\} = \sigma(A)$ e $\{\Pi_i\}$ è il proiettore sull'autospazio associato all'autovalore a_i , allora, nello stato ψ , la probabilità di osservare il valore a_i è data da $\langle \psi, \Pi_i \psi \rangle$.*³
- (3) *Se si ripete la stessa misura "istantaneamente" si ottiene lo stesso risultato.*
- (4) *la dinamica è lineare e lascia invariante la norma di uno stato. Inoltre ogni stato è raggiungibile dalla dinamica.*⁴
- (5) *Dato un sistema S_1 con spazio degli stati H_1 e un sistema S_2 con spazio degli stati H_2 , lo spazio degli stati associato al sistema S ottenuto considerando assieme S_1 e S_2 è dato da $H = H_1 \otimes H_2$.*⁵

Nel seguito discutiamo le conseguenze di questi principi.

2. ALCUNE SEMPLICI CONSEGUENZE DEI POSTULATI (1-5)

Prima di tutto ogni operatore Hermitiano A è diagonalizzabile. Quindi, se A è compatto, possiamo scriverlo come

$$Av = \sum_{k \in \mathbb{N}} a_k \Pi_k \psi$$

dove $\Pi_k^* = \Pi_k$ e $\Pi_k \Pi_j = \Pi_k \delta_{ij}$ e $\sum_k \Pi_k = \mathbf{1}$. Ne segue che se il sistema è nello stato ψ_k tale che $A\psi_k = a_k \psi_k$ si ha $\Pi_j \psi_k = \psi_k \delta_{jk}$, quindi la probabilità di osservare il valore a_j è data da

$$\langle \psi_k, \Pi_j \psi_k \rangle = \delta_{kj} \langle \psi_k, \psi_k \rangle = \delta_{kj}.$$

Dunque, in questo caso il risultato della misura è a_k con probabilità uno, ovvero il risultato è deterministico.

Date: August 16, 2023.

¹La parola *sistema* è un concetto primitivo e sta a significare ciò che si vuole descrivere.

²In meccanica classica lo spazio degli stati si chiama spazio delle fasi ed è $\mathbb{R}^{2n}$ o, più in generale, un manifold simplettico.

³In meccanica classica gli osservabili sono funzioni $f : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}$ e, dato uno stato $x \in \mathbb{R}^{2n}$, il risultato della misura è sempre lo stesso ed è $f(x)$.

⁴In dinamica classica la dinamica è data da una ODE ed è, in generale, non lineare.

⁵Nel caso classico se $\mathbb{R}^{2n}$ e $\mathbb{R}^{2m}$ sono gli spazi delle fasi di due sistemi, lo spazio delle fasi del sistema congiunto è $\mathbb{R}^{2(n+m)} = \mathbb{R}^{2n} \times \mathbb{R}^{2m}$.

D'altro canto se in uno stato ψ il risultato di una misura è sempre a_k allora deve essere $\langle \psi, \Pi_j \psi \rangle = \delta_{jk}$. Quindi $\|\Pi_j \psi\|^2 = \langle \Pi_j \psi, \Pi_j \psi \rangle = \langle \psi, \Pi_j \psi \rangle = \delta_{jk}$ e

$$\psi = \sum_j \Pi_j \psi = \Pi_k \psi$$

da cui segue $A\psi = a_k \Pi_k \psi = a_k \psi$ ovvero ψ deve essere un autovettore associato all'autovalore a_k .

Remark 2.1. Si noti che (3) afferma che se A è un osservabile e una misura nello stato ψ da il risultato $a \in \sigma(A)$, se si ripete la misura si otterrà nuovamente a . Dalle considerazioni precedenti segue che questo è possibile solo se dopo la misura il sistema sta in un autostato associato all'autovalore a . Si noti però che questa analisi non spiega cosa significa che il valore della misura è a , nè in cosa consista una misura. In particolare, non si parla dell'apparato di misura. Una analisi più precisa sembra quindi necessaria, vedasi la Sezione 4.

3. DINAMICA

Prima di continuare a discutere di misure, occupiamoci della dinamica. Per comodità chiamiamo H lo spazio degli stati. Poichè la dinamica è lineare essa può essere rappresentata da un operatore $U(t)$, ovvero se ψ è lo stato iniziale allora lo stato al tempo t sarà dato da $\psi(t) = U(t)\psi$. Ma, per ipotesi, $\|U(t)\psi\| = \|\psi\|$. Per polarizzazione segue che $\langle U(t)\psi, U(t)\psi' \rangle = \langle \psi, \psi' \rangle$ per ogni stato ψ, ψ' , dunque $U(t)^* U(t) = \mathbf{1}$.

Questo implica che $(U(t)U(t)^*)^2 = U(t)U(t)^* U(t)U(t)^* = U(t)U(t)^*$ ovvero $U(t)U(t)^*$ è un proiettore. Si noti che il range di $U(t)$ è chiuso.⁶ Inoltre il nucleo è $\{0\}$. Quindi, se $U(t)U(t)^* v = 0$, per qualche $v \neq 0$, allora deve essere che $v \notin \text{Range}(U(t))$ contrariamente all'assunzione che ogni stato è raggiungibile. Infatti se esiste $w \in H$ tale che $v = U(t)w$ allora si ha la contraddizione

$$0 = U(t)U(t)^* v = U(t)U(t)^* U(t)w = U(t)w = v \neq 0.$$

Ne segue che anche $U(t)U(t)^* = \mathbf{1}$, e quindi U^* è l'inversa di U . Dunque, se la dinamica è differenziabile, differenziando $U(t)U(t)^* = \mathbf{1}$ si ha

$$(3.1) \quad \left[\frac{d}{dt} U(t) \right] U(t)^* + U(t) \left[\frac{d}{dt} U(t) \right]^* = 0.$$

Ponendo $\mathcal{H}(t) = i\hbar \left[\frac{d}{dt} U(t) \right] U(t)^*$ (si noti che il fattore $i\hbar$ è una normalizzazione arbitraria che introduciamo per ragioni storiche e di convenienza, non fisiche) (3.1) implica che $\mathcal{H}^* = \mathcal{H}$. Inoltre

$$i\hbar \frac{d}{dt} \psi(t) = i\hbar \frac{d}{dt} U(t)\psi = \mathcal{H}(t)U(t)\psi = \mathcal{H}(t)\psi(t)$$

che non è altro che l'equazione di Schrödinger.

Si noti che deve essere $U(0) = \mathbf{1}$, poichè in un tempo nullo nulla cambia. Se la dinamica è invariante per traslazione temporale allora significa che la dinamica $U(t)$ dal tempo zero al tempo t è la stessa che la dinamica dal tempo s al tempo $s+t$, ovvero $U(t+s) = U(t)U(s)$. Da cui, scambiando il ruolo di s e t , segue anche $U(s)U(t) = U(t)U(s)$. Differenziando $U(t+s) = U(t)U(s)$ rispetto a t si ha

⁶Se $\{w_i\}$ è una successione nel range di $U(t)$ che convergente a w allora esiste una successione $\{v_i\}$ tale che $U(t)v_i = w_i$. Ma allora $\|v_i - v_j\| = \|U(t)(v_i - v_j)\| = \|w_i - w_j\|$ dunque v_i è Cauchy. Detto v il limite si ha $U(t)v = w$, ovvero w appartiene al range di $U(t)$.

$\mathcal{H}(t+s)U(t+s) = \mathcal{H}(t)U(t)U(s) = \mathcal{H}(t)U(t+s)$ ovvero $\mathcal{H}$ non dipende dal tempo. Inoltre differenziando $U(s)U(t) = U(t)U(s)$ rispetto a s e ponendo poi $s = 0$ si ha $\mathcal{H}U(t) = U(t)\mathcal{H}$, ovvero $[\mathcal{H}, U(t)] = 0$. Dunque $\mathcal{H}$ è un osservabile che commuta con la dinamica. A che quantità fisica corrisponde? Si noti che

$$\langle \psi(t), \mathcal{H}\psi(t) \rangle = \langle \psi, \mathcal{H}\psi \rangle$$

ovvero si tratta di una quantità conservata. Ma nella meccanica classica (che, in un qualche modo deve essere il limite della meccanica quantistica per oggetti macroscopici) abbiamo un nome per una quantità conservata in tutti i sistemi indipendenti dal tempo: l'*energia* (o, in alternativa, l'*Hamiltoniana*).

4. LA MISURA E I SUOI MISTERI

L'osservazione 2.1 ci suggerisce alcune considerazioni interessanti.

Consideriamo il sistema apparato di misura + sistema allora secondo il postulato (5) lo stato del sistema composto è descritto dal prodotto tensoriale $H \otimes \mathbb{H}$ dove H è lo spazio degli stati del sistema e $\mathbb{H}$ quello dell'apparato. Consideriamo un apparato di misura corrispondente all'osservabile $A = \sum_i a_i P_i$, $P_i P_j = \delta_{ij} P_i$, $\sum_i P_i = \mathbb{1}$. Per semplicità assumiamo che $P_i \psi = \psi_i \langle \psi_i, \psi \rangle$. Poichè stiamo considerando quantistico anche il sistema composto, possiamo fare una misura sull'apparato di misura (per sapere quale è stato il risultato della misura) e questo corrisponde ad un osservabile $\mathcal{A} = \sum_i a_i \Pi_i$, $\Pi_i \Pi_j = \delta_{ij} \Pi_i$, $\sum_i \Pi_i = \mathbb{1}$.

Se al momento iniziale il sistema sta nello stato ψ e l'apparato nello stato Ψ allora il sistema composto sta nello stato $\psi \otimes \Psi$. Detta $U(t)$ l'evoluzione del sistema composto si ha che lo stato dopo la misura è dato da $U(t)(\psi \otimes \Psi)$. Se l'apparato è efficiente ne segue che, se $\psi = \psi_i$, allora dopo la misura l'apparato deve essere in uno stato Ψ_i tale che $\mathcal{A}\Psi_i = a_i \Psi_i$, visto che in questo caso il risultato della misura deve essere sempre a_i . D'altro canto se ripetiamo la misura dobbiamo ottenere nuovamente a_i e ciò significa che il sistema deve essere ancora nello stato ψ_i . Ne segue che, per ogni i , deve essere

$$(4.1) \quad U(t)\psi_i \otimes \Psi = \psi_i \otimes \Psi_i.$$

Remark 4.1. Si noti che la (4.1) implica, giustamente, che prima della misura l'apparato deve stare in uno stato specifico. Infatti se l'apparato potesse fare misure partendo da due stati diversi $\Psi^1 \neq \Psi^2$, si avrebbe

$$U(t)\psi_i \otimes (\Psi^1 - \Psi^2) = 0$$

il che contraddice l'unitarietà di U .

Problem 4.2. Una domanda legittima è se un apparato efficiente nel senso descritto sopra possa esistere. Se ne descriva uno nel caso in cui $H, \mathbb{H} = \mathbb{R}^2$, e $A = \mathcal{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. (suggerimento: $U(t)e_1 \otimes e_1 = e_1 \otimes e_1$, $U(t)e_2 \otimes e_1 = e_2 \otimes e_2$, $U(t)e_1 \otimes e_2 = e_1 \otimes e_2$, $U(t)e_2 \otimes e_2 = e_2 \otimes e_1$.)

La (4.1) e la linearità della evoluzione implica che se lo stato iniziale del sistema è $\psi = \sum_i c_i \psi_i$, si ha

$$\Psi^* := U(t)\psi \otimes \Psi = \sum_i c_i \psi_i \otimes \Psi_i.$$

Questo non è probabilmente quello che il lettore si aspettava, tuttavia non è in contraddizione con i postulati. Infatti se facciamo una misura sull'apparato (ovvero lo guardiamo) otteniamo una variabile aleatoria che da al risultato a_i la probabilità

$$\langle \Psi^*, \Pi_i \Psi^* \rangle = c_i \langle \Psi^*, \psi_i \otimes \Psi_i \rangle = |c_i|^2 = |\langle \psi_i, \psi \rangle|^2$$

come richiesto dal postulato 2.

Non esiste una contraddizione neppure con 4 in quanto per ripetere la misura dobbiamo ri-inizializzare l'apparato (riportandolo nello stato Ψ), e in questo caso occorre scrivere da qualche parte il risultato della prima misura per fare poi un confronto, oppure dobbiamo introdurre un nuovo apparato di misura indipendente dal primo. Consideriamo il secondo caso che è leggermente più semplice.

Questo significa che ora gli stati del sistema sono descritti da $H \otimes \mathbb{H} \otimes \mathbb{H}$ e una misura coinvolge il sistema e un apparato ma lascia indisturbato l'altro. Dunque lo stato iniziale è $\psi \otimes \Psi \otimes \Psi$, e dopo la prima misura si ha lo stato $\sum_i c_i \psi_i \otimes \Psi_i \otimes \Psi$. Ricordando (4.1) ne segue che dopo la seconda misura si ha lo stato

$$\sum_i c_i \psi_i \otimes \Psi_i \otimes \Psi_i$$

Per sapere cosa è successo occorre osservare i due apparati, ovvero considerare un operatore A sullo spazio $H \otimes \mathbb{H} \otimes \mathbb{H}$ tale che

$$A\psi \otimes \Psi_i \otimes \Psi_j = b_{ij} \psi \otimes \Psi_i \otimes \Psi_j$$

dove $b_{ij} = b_{kl}$ implica $i = k$ e $j = l$. Ovviamente l'interpretazione è che se vediamo il valore b_{kl} allora significa che il primo apparato ha misurato a_k e il secondo a_l . Ne segue che la probabilità di osservare il valore $b_{k,l}$ è data da

$$\begin{aligned} & \left| \left\langle \sum_i c_i \psi_i \otimes \Psi_i \otimes \Psi_i, \mathbf{1} \otimes |\Psi_k\rangle \langle \Psi_k| \otimes |\Psi_l\rangle \langle \Psi_l| \sum_s c_s \psi_s \otimes \Psi_s \otimes \Psi_s \right\rangle \right|^2 = \\ & = \delta_{kl} \left| \left\langle \sum_i c_i \psi_i \otimes \Psi_i \otimes \Psi_i, c_k \psi_k \otimes \Psi_k \otimes \Psi_k \right\rangle \right|^2 = \delta_{kl} c_k^2. \end{aligned}$$

Ovvero abbiamo probabilità nulla di vedere i due apparati che danno valori diversi alla misura, come richiesto dal postulato (4), mentre la probabilità di vedere il valore b_{kk} , che corrisponde alla misura a_k è, come deve essere, $|c_k|^2$.

Dunque i postulati (1-5) non sono contraddittori, ma solamente controintuitivi.

Remark 4.3. *In particolare, il risultato di una misura è quello di creare uno stato in cui il sistema e l'apparato sono in una precisa relazione tra di loro (entanglement, si veda la sezione 6) ed esiste una correlazione stretta tra il risultato di una misura sul sistema e una sull'apparato.*

Alcuni interpretano l'entanglement come la creazione di universi paralleli (interpretazione dei molti mondi di Everett) ma forse è meglio non addentrarsi nel tema della interpretazione della Meccanica Quantistica, argomento che rimane, a tutt'oggi, controverso. Qui ci accontentiamo del fatto che abbiamo una descrizione coerente, anche se bizzarra, del mondo.

Si noti che, contrariamente a quanto spesso si dice, una misura non disturba necessariamente il sistema. Per rendersene conto si consideri il caso in cui il sistema è uno stato ψ e si consideri una misura A tale che $A\psi = a\psi$. Allora, per quanto detto

sopra, il sistema congiunto si troverà, dopo la misura, con probabilità uno nello stato $\psi \otimes \Psi$, dove Ψ è il corrispondente autostato dell'apparato di misura. Ovvero, l'apparato diventa entangled con lo stato, ma lo stato del sistema non cambia. Questo è molto simile a quello che succede classicamente ove si può misurare un sistema senza perturbarlo.

Remark 4.4. *Questo tipo di misure, in cui lo stato del sistema non cambia, sono a volte chiamate misure non distruttive.*

Rimane la stranezza del risultato probabilistico di una misura. Sull'argomento si sono scritti fiumi di inchiostro. Qui vogliamo solo notare che se abbiamo N sistemi identici, tutti nello stesso stato ψ e li misuriamo tutti, allora lo stato finale sarà dato da

$$\sum_{i_1, \dots, i_N} c_{i_1} \cdots c_{i_N} \psi_{i_1} \otimes \cdots \otimes \psi_{i_1} \otimes \Psi_{i_1} \otimes \cdots \otimes \Psi_{i_N}.$$

Ne segue che la probabilità di avere come risultato di una misura $\{a_{i_1}, \dots, a_{i_N}\}$ è data esattamente dalla distribuzione di N variabili aleatorie identiche e indipendenti con distribuzione determinata dalla probabilità $|c_i|^2$ di assumere il valore a_i . In particolare, ne segue che se si considera un osservabile che misura, per esempio, la media degli a , per N è grande, il numero di autostati $\Psi_{i_1} \otimes \cdots \otimes \Psi_{i_N}$ che danno un risultato molto diverso da $\sum_i c_i a_i$ è estremamente piccolo.⁷

Per capire meglio quanto siano bizzarri questi *entangled states* si veda il semplice esempio nella sezione 6.

5. INDETERMINAZIONE

Si considerino due operatori autoaggiunti A, B , $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ e un insieme denso D con $D \subset D(AB) \cap D(BA)$ tali che, per ogni $\psi \in D$,

$$(5.1) \quad [A, B]\psi = \alpha\psi$$

Si noti che per ogni, $\varphi, \psi \in D$

$$\begin{aligned} \alpha \langle \varphi, \psi \rangle &= \langle \varphi, [A, B]\psi \rangle = \langle \varphi, (AB - BA)\psi \rangle = \langle (B^*A^* - A^*B^*)\varphi, \psi \rangle \\ &= \langle (BA - AB)\varphi, \psi \rangle = -\langle [A, B]\varphi, \psi \rangle = -\bar{\alpha} \langle \varphi, \psi \rangle. \end{aligned}$$

Quindi deve essere $\alpha = -\bar{\alpha}$, ovvero $\alpha = ia$ per qualche $a \in \mathbb{R}$.

Remark 5.1. *Si noti che (5.1) non può accadere se H è finito dimensionale. Infatti, in tal caso, detta $d = \dim(H)$, si avrebbe*

$$iad = \text{Trace}(ia\mathbf{1}) = \text{Trace}([A, B]) = 0$$

ovvero $a = 0$, contrariamente all'ipotesi.

Se volgiamo quantificare la dispersione di una misura di un operatore autoaggiunto A in uno stato ψ è naturale introdurre la quantità

$$(5.2) \quad \sigma_A(\psi)^2 = \langle \psi, A^2\psi \rangle - \langle \psi, A\psi \rangle^2 = \langle A\psi - \langle A\psi, \psi \rangle \psi, A\psi - \langle A\psi, \psi \rangle \psi \rangle$$

Un fatto importante della meccanica quantistica è il seguente *principio di indeterminazione*.

⁷Questo segue dalla teoria delle grandi deviazioni in probabilità.

Theorem 5.2. *Dati due operatori autoaggiunti A, B , e un insieme denso D con $D \subset D(AB) \cap D(BA)$ tali che, per ogni $\psi \in D$,*

$$[A, B]\psi = i\hbar\psi$$

si ha, per ogni stato $\psi \in D$,

$$\sigma_A(\psi)\sigma_B(\psi) \geq \frac{\hbar}{2}.$$

Proof. Dalla (5.2) e usando la disuguaglianza di Schwartz abbiamo, per ogni $\psi \in D$,

$$\begin{aligned} \sigma_A(\psi)^2\sigma_B(\psi)^2 &= \|A\psi - \langle A\psi, \psi \rangle\psi\|^2 \|B\psi - \langle B\psi, \psi \rangle\psi\|^2 \\ &\geq |\langle A\psi - \langle A\psi, \psi \rangle\psi, B\psi - \langle B\psi, \psi \rangle\psi \rangle|^2 \\ &\geq [\Im(\langle A\psi - \langle A\psi, \psi \rangle\psi, B\psi - \langle B\psi, \psi \rangle\psi \rangle)]^2 \\ &= \left[\frac{\langle A\psi - \langle A\psi, \psi \rangle\psi, B\psi - \langle B\psi, \psi \rangle\psi \rangle - \langle B\psi - \langle B\psi, \psi \rangle\psi, A\psi - \langle A\psi, \psi \rangle\psi \rangle}{2i} \right]^2 \\ &= \left[\frac{\langle \psi, [A, B]\psi \rangle}{2i} \right]^2 = \left[\frac{\hbar}{2} \right]^2. \end{aligned}$$

□

Il lemma precedente implica una ulteriore limitazione per degli operatori A, B che soddisfano le relazioni di commutazione (5.1).

Remark 5.3. *Se A ha un autovettore, allora non esiste un operatore B tale che valgano le relazioni di commutazione (5.1). Infatti, se esistono $\psi \in H$ e $a \in \mathbb{R}$ tali che $A\psi = a\psi$ allora*

$$\sigma_A(\psi)^2 = \langle \psi, A^2\psi \rangle - \langle \psi, A\psi \rangle^2 = 0$$

dunque, per ogni B si ha $\sigma_A(\psi)\sigma_B(\psi) = 0$, contrariamente al Teorema 5.2.

A questo punto ci si domanda se le relazioni (5.1) sono veramente possibili. La risposta è sì: sia $L^2(\mathbb{R})$, $D = \mathcal{C}_0^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ (ovvero le funzioni differenziabili a supporto compatto) $q\psi(x) = x\psi(x)$ con $D(q) = \{\psi \in L^2 : \int_{\mathbb{R}} x^2 |\psi(x)|^2 dx < \infty\}$ e $p = i\hbar \frac{d}{dx}$ con $D(p) = \{\psi \in L^2 : \int_{\mathbb{R}} |\psi'|^2 < \infty\}$. Allora q, p sono auto-aggiunti (lo si verifichi); D è denso in L^2 e sia pq che qp sono ben definiti in D , inoltre, per ogni $\psi \in D$ si ha

$$(5.3) \quad \{[q, p]\psi\}(x) = ix\hbar\psi'(x) - i\hbar(x\psi(x))' = i\hbar\psi(x).$$

Problem 5.4. *Si noti che l'esempio precedente non funziona in $L^2([0, 1])$ con $D(p) = \{\psi \in L^2 : \int_{\mathbb{R}} x^2 |\psi(x)|^2 dx < \infty; \psi(0) = \psi(1)\}$. Infatti, in questo caso q, p sono ancora auto-aggiunti ma, come abbiamo già visto, p ha spettro discreto e quindi autovettori. Cosa non funziona in questo caso nel conto (5.3) ?⁸*

6. ENTANGLEMENT

I cosiddetti entangled states, la cui rilevanza teorica fu illustrata inizialmente da [Einstein, Podolski, Rosen](#) nel loro famosissimo cosiddetto EPR paradox, stanno assumendo una importanza pratica sempre maggiore a causa dei recenti progressi tecnologici sia in quantum metrology che quantum computing (se volete divertirvi

⁸Suggerimento: si verifichi che se ψ è un autovettore di p allora $q\psi \notin D(p)$.

un poco col quantum computing potete visitare il sito [Qiskit](#)). Nel seguito descriverò semplici esempi più di entanglement e interferenza.

Si considerino le matrici di Pauli:

$$(6.1) \quad \begin{aligned} \sigma_0 &= \mathbf{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \sigma_1 &= \sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ \sigma_2 &= \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \\ \sigma_3 &= \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Problem 6.1. Si verifichi che $\sigma_i^2 = \mathbf{1}$ e che

$$[\sigma_i, \sigma_j] = \varepsilon_{i,j,k} \sigma_k$$

dove $\varepsilon_{i,j,k}$ da il segno della permutazione (simbolo di Levi-Civita).

Data una particella con *spin* allora lo spazio degli stati è $\mathbb{C}^2$. Le matrici σ_i sono auto-aggiunte, e quindi osservabili.

Gli autovettori di σ_1 sono $\psi_+^x = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1)$ con autovalore $+1$ e $\psi_-^x = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1)$ con autovalore -1 .

Gli autovettori di σ_2 sono $\psi_+^y = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, i)$ con autovalore $+1$ e $\psi_-^y = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -i)$ con autovalore -1 .

Gli autovettori di σ_3 sono $\psi_+^z = (1, 0)$ con autovalore $+1$ e $\psi_-^z = (0, 1)$ con autovalore -1 .

L'interpretazione fisica è che sono gli operatori associati alla misura dello spin nelle direzioni x, y e z , rispettivamente.

Problem 6.2. Si noti che la probabilità di avere ± 1 per σ_x o σ_y negli stati $\psi_\pm^z$ è uguale a $\frac{1}{2}$.

Problem 6.3. Si noti che $\sigma_x \psi_+^z = \psi_-^z$ e $\sigma_x \psi_-^z = \psi_+^z$, inoltre $\sigma_y \psi_+^z = i\psi_-^z$ e $\sigma_y \psi_-^z = -i\psi_+^z$.

Problem 6.4. Si mostri che gli autovalori di $\sigma(n) = \sum_{i=1}^3 n_i \sigma_i$, $n \in \mathbb{R}^3$, sono $\pm \|n\|$. Si mostri che per ogni stato ψ esiste un vettore $n \in \mathbb{R}^3$, $\|n\| = 1$, tale che la misura associata l'osservabile $\sigma(n)$ da come risultato sempre $+1$.

Si noti che l'ultimo problema giustifica l'interpretazione di $\mathcal{C}^2$ come uno stato di spins: ogni stato è interpretabile come una particella con spin $n \in \mathbb{R}^3$, cosa non sorprendente visto che $\mathcal{C}^2$ ha quattro dimensioni reali e quindi lo spazio degli stati (ovvero dei vettori di norma 1) è tridimensionale, inoltre la phase di uno stato non ne cambia lo spin.

Immaginiamo ora di avere due particelle, allora spazio degli stati sarà $\mathbb{R}^4$. Usiamo l'apice $'$ per indicare gli operatori e gli stati associati alla seconda particella. La misura dello spin della prima particella corrisponde all'operatore $\bar{\sigma}_i = \sigma_i \otimes \mathbf{1}$ mentre quella sulla seconda particella a $\bar{\sigma}'_i = \mathbf{1} \otimes \sigma'_i$.

Si consideri lo stato $\psi_* = \frac{1}{\sqrt{2}} [\psi_+^z \otimes \psi_-^{z'} + \psi_-^z \otimes \psi_+^{z'}]$.

Problem 6.5. Si mostri che $\langle \psi_*, \bar{\sigma}_i \psi_* \rangle = 0$, $\langle \psi_*, \bar{\sigma}'_i \psi_* \rangle = 0$.

Si noti che questo è sostanzialmente differente dalla situazione nel Problema 6.4: in qualunque direzione si cerchi di misurare lo spin si ottiene sempre zero in media. Questo stato, che ha proprietà che non hanno alcuna corrispondenza in meccanica classica, si chiama *entangled*.

Una proprietà sorprendente di questo stato è che se si misura σ_z della prima particella e si ottiene $+1$ allora Remark 2.1 implica che dopo la misura lo stato del sistema deve essere proporzionale a

$$\langle \psi_+^z \otimes \psi_-^{z'}, \psi_* \rangle \psi_+^z \otimes \psi_-^{z'} + \langle \psi_+^z \otimes \psi_+^{z'}, \psi_* \rangle \psi_+^z \otimes \psi_+^{z'} = \psi_+^z \otimes \psi_-^{z'}.$$

Questo implica che se si misura σ_z' si otterrà sempre -1 . Quindi il risultato della prima misura determina la seconda anche se i due sistemi sono separati da una distanza enorme.

Remark 6.6. *Si noti che la discussione precedente implica una qualche non-località della Meccanica Quantistica. Questo sembra contraddire la teoria delle relatività secondo cui la luce è la velocità massima. Tuttavia una più attenta analisi mostra che non vi è alcuna contraddizione, semplicemente il mondo è strano.*

Facciamo un altro esempio che mostra la stranezza del mondo, questa volta osservando la dinamica di un singolo spin. Supponiamo che in un tempo 1 la dinamica sia data dalla matrice

$$U = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Poichè $U^*U = \mathbf{1}$ questa è una dinamica consistente coi nostri postulati. Vediamo cosa implica se partiamo con uno stato $\psi = (a, b)$ e, al tempo uno, misuriamo σ_z . Dalla discussione precedente avremo il risultato 1 con probabilità $|\langle \psi_+^z, U\psi \rangle|^2 = \frac{1}{2}|a - b|^2$ e il risultato -1 con probabilità $\frac{1}{2}|a + b|^2$. Se invece facciamo la misura al tempo due otterremo 1 con probabilità $|\langle \psi_+^z, U^2\psi \rangle|^2 = |b|^2$ e il risultato -1 con probabilità $|a|^2$. Questo significa che se partiamo dagli stati $\psi_{\pm}^z$ al tempo uno avremo probabilità $1/2$ di vedere 1 e $1/2$ di vedere -1 . Dunque la dinamica assomiglia al lancio di una moneta. Tuttavia questa interpretazione non è corretta: se lanciamo la moneta due volte ci aspettiamo di vedere le stesse probabilità al secondo lancio, invece otteniamo, partendo ad esempio da ψ_+^z , -1 con probabilità uno.

Chiarmente questo dipende dal fatto che non abbiamo fatto nessuna misura al tempo 1. È facile vedere che se facciamo una misura sia al tempo uno che al tempo due, allora la probabilità di vedere -1 è data da $\sum_{\pm} |\langle \psi_-^z, U\psi_{\pm}^z \rangle \langle \psi_{\pm}^z, U\psi_+^z \rangle|^2 = \frac{1}{2}$, come ci si aspetterebbe classicamente.

Questo è un semplice esempio di *interferenza*.

7. DINAMICA–NEL CONCRETO

Quello che abbiamo detto sulla dinamica nella sezione 3 equivale, in meccanica classica, al dire che le equazioni del moto sono equazioni differenziali del secondo ordine. Dato un sistema specifico ciò non è molto utile a meno di avere una prescrizione di come scrivere tali equazioni. Come in meccanica classica non esiste una regola che copre tutti i possibili casi, ma solo alcuni principi generali. Facciamo quindi un esempio concreto: un sistema unidimensionale che consta di N particelle. Classicamente lo stato del sistema è descritto da $\mathbb{R}^{2N} = \{(x_i, v_i)\}$ dove le x_i e v_i sono le posizioni e velocità della particella i , rispettivamente. Lo spazio degli stati

quantistico è dato da $L^2(\mathbb{R}^N)$, ovvero gli stati (detti anche *funzioni d'onda*) sono funzioni $\psi(x_1, \dots, x_N)$, a valori complessi, di N variabili $x_i \in \mathbb{R}$.⁹ L'Hamiltoniana classica è data da

$$H = \sum_{i=1}^N \frac{m}{2} v_i^2 + \sum_{i=1}^{N-1} V(x_{i+1} - x_1).$$

La versione quantistica è data da un operatore in cui mv_i viene sostituito da $-i\hbar m \frac{\partial}{\partial x_i}$. Ovvero l'Hamiltoniana quantistica è, ponendo $x = (x_1, \dots, x_N)$,

$$H\psi(x) = \sum_{i=1}^N -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_i^2}(x) + \sum_{i=1}^{N-1} V(x_{i+1} - x_1)\psi(x).$$

Si noti che, come in meccanica classica, esiste una arbitrarietà nella descrizione del sistema. Per esempio, potremmo scegliere le coordinate $q = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i$ e $\xi_i = x_{i+1} - x_i$ e le funzioni d'onda sarebbe quindi del tipo $\phi(q, \xi)$. Questo definisce un operatore $\Xi : L^2(\mathbb{R}^N) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^N)$:

$$\psi(x) := \Xi\phi(x) = \phi\left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i, x_{i+1} - x_i\right).$$

Problem 7.1. *Si mostri che Ξ è una isometria (suggerimento: il cambio di coordinate classico ha determinante 1).*

Ne segue che, nelle nuove coordinate, la nuova Hamiltoniana è data da $H_1 = \Xi^* H \Xi$.

$$\Xi^* H \Xi$$

Problem 7.2. *Si mostri che $x_k = q - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N-1} \xi_i(N-i) + \sum_{i=1}^{k-1} \xi_i$.*

Problem 7.3. *Si mostri che*

$$H_1\phi = -\frac{\hbar^2}{2Nm} \frac{\partial^2 \phi}{\partial q^2} - \frac{\hbar^2}{2m} \sum_{i=1}^{N-1} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \xi_i^2} - 2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial \xi_i \partial \xi_{i+1}} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial \xi_{i+1}^2} + \sum_{i=1}^{N-1} V(\xi_i)\phi$$

Si può cercare una soluzione del tipo $\phi(q, \xi) = a(q)b(\xi)$ e la dinamica diventa

$$(7.1) \quad \begin{aligned} i\hbar \partial_t a &= -\frac{\hbar^2}{2Nm} \frac{\partial^2 a}{\partial q^2} \\ i\hbar \partial_t b &= -\frac{\hbar^2}{2m} \sum_{i=1}^{N-1} \frac{\partial^2 b}{\partial \xi_i^2} - 2 \frac{\partial^2 b}{\partial \xi_i \partial \xi_{i+1}} + \frac{\partial^2 b}{\partial \xi_{i+1}^2} + \sum_{i=1}^{N-1} V(\xi_i)b. \end{aligned}$$

Ovvero, come in meccanica classica, il centro di massa evolve indipendentemente dai gradi di libertà interni e soddisfa la stessa evoluzione di una particella libera di massa $M = Nm$.

Cominciamo con lo studiare la prima delle (7.1). Applicando la trasformata di Fourier otteniamo

$$i\hbar \partial_t \hat{a} = \frac{\hbar^2 k^2}{2M} \hat{a},$$

dove

$$\hat{a}(k, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-ikx} a(x, t) dx.$$

⁹Lo spazio delle configurazioni per una particella è dato da $L^2(\mathbb{R})$, quindi per N particelle è il prodotto tensoriale, N volte, di uno spazio di una particella, ovvero $\otimes^N L^2(\mathbb{R}) \sim L^2(\mathbb{R}^N)$.

Ovvero

$$\hat{a}(k, t) = e^{-i \frac{\hbar k^2}{2M} t} \hat{a}(k, 0).$$

Quindi

$$(7.2) \quad a(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-ikx - i \frac{\hbar k^2}{2M} t} \hat{a}(k, 0) dk.$$

Se volgiamo una espressione più esplicita occorre specificare la condizione iniziale. Supponiamo che $a(x, 0) = C e^{-\lambda x^2 + ipx}$, con $\lambda > 0$ e $p \in \mathbb{R}$. Dove C è determinata dal fatto che deve essere uno stato e quindi l'integrale del modulo quadro deve essere uno.

Problem 7.4. *Si mostri che $C^2 = \sqrt{\frac{2\lambda}{\pi}}$. (suggerimento: si tratta di un integrale Gaussiano)*

Allora

$$\begin{aligned} \hat{a}(x, 0) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{2\lambda}{\pi} \right)^{\frac{1}{4}} \int_{\mathbb{R}} e^{-ix(k-p) - \lambda x^2} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{2\lambda}{\pi} \right)^{\frac{1}{4}} e^{-\frac{1}{4\lambda}(k-p)^2} \int_{\mathbb{R}} e^{-\lambda(x + i \frac{1}{2\lambda}(k-p))^2} dx. \end{aligned}$$

Dobbiamo quindi calcolare l'integrale di una funzione olomorpha. Per farlo usiamo il fatto che l'integrale su un ciclo chiuso è zero.¹⁰ Poniamo $A = \frac{\pi}{\lambda}(k-p)$ e, per ogni $L \in \mathbb{R}_+$, consideriamo le curve $\gamma_L^1(t) = \{t + iA\}$, $\gamma_L^2(t) = \{-t\}$ per $t \in [-L, L]$, e $\gamma_L^3(t) = \{L + iA(1-t)\}$, $\gamma_L^4(t) = \{-L + iAt\}$ per $t \in [0, 1]$. Quindi

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\gamma_L^1 \cup \gamma_L^3 \cup \gamma_L^2 \cup \gamma_L^4} e^{-\lambda z^2} dz = \int_{-L}^L e^{-\lambda(t+iA)^2} dt - iA \int_0^1 e^{-\lambda(L+iA(1-t))^2} dt \\ &\quad - \int_{-L}^L e^{-\lambda t^2} dt + iA \int_0^1 e^{-\lambda(L+At)^2} dt. \end{aligned}$$

Problem 7.5. *Si mostri che,*

$$\lim_{L \rightarrow \infty} \sup_{s \in [0, 1]} \left| e^{-\lambda(L+iAs)^2} \right| = 0.$$

Ne segue che

$$\begin{aligned} \hat{a}(x, 0) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{2\lambda}{\pi} \right)^{\frac{1}{4}} e^{-\frac{(k-p)^2}{4\lambda}} \lim_{L \rightarrow \infty} \int_{-L}^L e^{-\lambda(t+iA)^2} dt \\ (7.3) \quad &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{2\lambda}{\pi} \right)^{\frac{1}{4}} e^{-\frac{(k-p)^2}{4\lambda}} \lim_{L \rightarrow \infty} \int_{-L}^L e^{-\lambda t^2} dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{2\lambda}{\pi} \right)^{\frac{1}{4}} e^{-\frac{(k-p)^2}{4\lambda}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\lambda t^2} dt = \left(\frac{2\pi}{\lambda} \right)^{\frac{1}{4}} e^{-\frac{(k-p)^2}{4\lambda}}. \end{aligned}$$

¹⁰Il lettore potrebbe avere la tentazione di fare il cambio di variabile $\eta = x + i \frac{\pi}{\lambda}(k-p)$, ma quale sarebbe il suo significato? Non abbiamo mai discusso di cambi di variabili complesse.

Possiamo quindi calcolare (7.3)

$$\begin{aligned}
 a(x, t) &= \frac{1}{2\pi} \left(\frac{2\pi}{\lambda} \right)^{\frac{1}{4}} \int_{\mathbb{R}} e^{ikx - i\frac{\hbar k^2}{2M}t - \frac{(k-p)^2}{4\lambda}} dk \\
 &= \left(\frac{2\pi}{\lambda} \right)^{\frac{1}{4}} \int_{\mathbb{R}} e^{2\pi i(k + \frac{p}{2\pi})x - i\frac{\hbar(k + \frac{p}{2\pi})^2}{2M}t - \frac{\pi^2}{\lambda}k^2} dk \\
 (7.4) \quad &= \left(\frac{2\pi}{\lambda} \right)^{\frac{1}{4}} e^{ipx - i\frac{\hbar p^2}{8\pi^2 M}t} \int_{\mathbb{R}} e^{2\pi i k(x - \frac{\hbar t}{4\pi^2 M}p) - (\frac{\pi^2}{\lambda} + i\frac{\hbar t}{2M})k^2} dk \\
 &= \frac{\left(\frac{2\pi}{\lambda} \right)^{\frac{1}{4}}}{\sqrt{\frac{\hbar t}{8\pi^2 M}i + \frac{\pi}{\lambda}}} e^{ipx - i\frac{\hbar p^2}{8\pi^2 M}t - \frac{\lambda(1 - i\frac{\hbar t}{2M\pi^2})(x - \frac{\hbar t}{4\pi^2 M}p)^2}{1 + \frac{\hbar^2 t^2 \lambda^2}{4M^2 \pi^4}}}
 \end{aligned}$$

dove l'ultima riga segue come nella derivazione di (7.3). Quindi la probabilità di trovare il centro di massa nel punto x è data da

$$|a(x, t)|^2 = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\frac{\hbar^2 t^2 \lambda}{4\pi^3 M^2} + \frac{\pi}{\lambda}}} e^{-\frac{2\lambda(x - \frac{\hbar t}{4\pi^2 M}p)^2}{1 + \frac{\hbar^2 t^2 \lambda^2}{4M^2 \pi^4}}}.$$

In altre parole la distribuzione rimane Gaussiana, ma il centro si muove con velocità $v = \frac{\hbar t}{4\pi^2 M}p$ mentre il parametro della gaussiana è $\lambda(t) = \frac{\lambda}{1 + \frac{\hbar^2 t^2 \lambda^2}{4M^2 \pi^4}}$. Questo implica che l'incertezza nella posizione è circa

$$\Delta(t) := \sqrt{\int_{\mathbb{R}} (x - vt)^2 |a(x, t)|^2} = \frac{1}{2\sqrt{\lambda}} \sqrt{1 + \frac{\hbar^2 t^2 \lambda^2}{4M^2 \pi^4}} = \Delta(0) \sqrt{1 + \frac{\hbar^2 t^2}{64M^2 \pi^4 \Delta(0)^4}}.$$

È interessante vedere cosa questo significa per un oggetto concreto. A questo scopo supponiamo che $\Delta(0) = 10^{-6}$ metri (un micron).

Poichè $\hbar \sim 10^{-34}$ m² kg/s abbiamo

$$\Delta(t) \sim 10^{-6} \sqrt{1 + 10^{-48} \frac{t^2}{M^2}}.$$

Questo significa che se $M = 10^{-3}$ kg, allora $\Delta(t) \sim \Delta(0)$ per circa 10^{13} anni, molto più della vita dell'universo. Se invece stiamo guardando una proteina media, diciamo circa $50 \cdot 10^3$ Dalton ovvero circa 10^{-22} kg, allora $\Delta(t) \sim \Delta(0)$ per circa un minuto.

D'altro canto se stiamo guardando un atomo di idrogeno allora $M \sim 10^{-27}$ kg, quindi per t maggiore di un millesecundo abbiamo

$$\Delta(t) \sim 10^{-3}t$$

quindi in circa un'ora abbiamo una imprecisione dell'ordine del metro. Al contrario, se osserviamo un elettrone allora $M \sim 10^{-30}$ kg, quindi già dopo un nanosecondo si ha

$$\Delta(t) \sim t.$$

Ovvero una imprecisione di un metro dopo un secondo.

Remark 7.6. È importante ricordare che le stime di cui sopra sono fatte nell'assunzione che il sistema sia isolato. Se questo interagisce con l'ambiente la situazione può cambiare completamente (si pensi alle camere a bolle dove le particelle elementari lasciano tracce molto simili a traiettorie classiche).

Per continuare la nostra analisi occorre dire qualcosa di più sul potenziale. Per semplicità supponiamo che $V(\xi) = \frac{K}{2}(\xi - \ell)^2$. Dal punto di vista macroscopico, ovvero quando N è grande, il sistema rappresenta (nel caso classico) una barra di lunghezza approssimativamente $L = N\ell$.

Remark 7.7. *Si noti che se l'energia totale del sistema è piccola, allora per qualunque potenziale possiamo sviluppare il potenziale attorno al suo minimo e si ottiene il caso armonico considerato sopra.*

Per capire che succede nel caso quantistico si noti che l'energia dei gradi interni di libertà è data da

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m} \sum_{i=1}^{N-1} \frac{\partial^2}{\partial \xi_i^2} - 2 \frac{\partial^2}{\partial \xi_i \partial \xi_{i+1}} + \frac{\partial^2}{\partial \xi_{i+1}^2} + \sum_{i=1}^{N-1} \frac{K}{2} (\xi_i - \ell)^2.$$

Volgiamo studiare la lunghezza della barra data da

$$x_N - x_1 = \sum_{i=1}^{N-1} \xi_i = \sum_{i=1}^{N-1} (\xi_i - \ell) + \ell N.$$

Consideriamo uno stato b che descriva una situazione di equilibrio. In particolare assumiamo che $\frac{K}{2} \langle b, (\xi_i - \ell)^2 b \rangle N = \frac{1}{2} \langle b, H b \rangle = EN$, ovvero tutte le particelle si comportano nello stesso modo e l'energia cinetica totale è uguale all'energia potenziale totale. Allora la deviazione dalla lunghezza da L sarà data da

$$\begin{aligned} \langle b, (x_N - x_1 - L)^2 b \rangle^{\frac{1}{2}} &= \langle b, \left(\sum_{i=1}^{N-1} (\xi_i - \ell) \right)^2 b \rangle^{\frac{1}{2}} \leq \left[N \sum_{i=1}^{N-1} \langle b, (\xi_i - \ell)^2 b \rangle \right]^{\frac{1}{2}} \\ &= N \left(\frac{2E}{K} \right)^{\frac{1}{2}} = \frac{L}{\ell} \left(\frac{2E}{K} \right)^{\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

dove, nella prima riga abbiamo usato la disuguaglianza di Schwartz.

Ne segue che per K grande e E piccolo la lunghezza tipica della barra sarà ℓN ovvero la lunghezza è simile a quella classica.

Abbiamo quindi visto che per N grande il sistema si comporta approssimativamente come una barra di lunghezza L e centro di massa q .

Problem 7.8. *Per una analisi più precisa si diagonalizzi l'Hamiltoniana e se ne calcolino gli autovettori.*

8. MISURA, IL CASO MACROSCOPICO

Per vedere cosa significa misurare in un caso macroscopico, consideriamo il caso in cui la massa è un grammo, caso che abbiamo visto avere poca dispersione. Facciamo una misura di posizione attraverso l'operatore

$$Q\psi = \sum_{k=-L}^L k\delta(2\lambda/\pi)^{\frac{1}{2}} e^{-\lambda(x-k\delta)^2} \int e^{-\lambda(y-k\delta)^2} \psi(y) dy.$$

dove $\delta = 10^{-5}$ metri, 10 micron. Per λ grande le funzioni $e^{-\lambda(y-k\delta)^2}$ sono quasi ortogonali e quindi sono vicini agli autovettori di Q . Allora la probabilità di misurare

la posizione $k\delta$ al tempo t è data da

$$p_k = \left| (2\lambda/\pi)^{\frac{1}{4}} \int e^{-\lambda(y-k\delta)^2} \frac{\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^{\frac{1}{4}}}{\sqrt{\frac{\hbar t}{8\pi^2 M}i + \frac{\pi}{\lambda}}} e^{ipy - i\frac{\hbar p^2}{8\pi^2 M}t - \frac{\lambda(1-i\frac{\hbar t\lambda}{2M\pi^2})(y-\frac{\hbar t}{4\pi^2 M}p)^2}{1+\frac{\hbar^2 t^2 \lambda^2}{4M^2 \pi^4}}} dy \right|^2$$

Sia $\lambda = \frac{10^{12}}{4}$, che corrisponde ad un'onda concentrata in una regione di larghezza 10^{-6} . Se $|k\delta - \frac{\hbar t}{4\pi^2 M}p| \geq \delta$ allora

$$p_k \leq 2e^{-\lambda\delta^2} = 2e^{-25} \sim 10^{-11}.$$

Dunque il risultato della misura è estremamente simile ad una particella classica che si muove con velocità $v = \frac{\hbar}{4\pi^2 M}p$.

CARLANGEO LIVERANI, DIPARTIMENTO DI MATEMATICA, II UNIVERSITÀ DI ROMA (TOR VERGATA), VIA DELLA RICERCA SCIENTIFICA, 00133 ROMA, ITALY.

Email address: `liverani@mat.uniroma2.it`