MOTI PERIODICI E FRAZIONI CONTINUE

CARLANGELO LIVERANI

1. Prodromi: da Cesare a Gregorio XIII

Il moto per eccellenza nell'antichità era il moto circolare o, che poi è lo stesso, il moto *periodico*: i giorni, i mesi, le stagioni, gli anni. Il problema fondamentale era prevedere. Ad esempio: tra quanti giorni ci sarà il prossimo solstizio d'estate?[1]

Come caso emblematico consideriamo il moto di rotazione terrestre (giorni) e il moto di rivoluzione attorno al sole (anno). Sono due moti periodici uno di periodo T_g uguale ad un giorno, l'altro di periodo T_a, un anno.

Il rapporto tra i periodi (misurati in giorni) è di[2]

$$\frac{T_a}{T_g} \sim 365.24218967$$

questo significa che l'anno tropicale medio è noto con un errore inferiore a 10^{-3} secondi. In realtà questa è una precisione eccessiva per la discussione che segue. Assumeremo perciò

$$T_a \sim 365.242189 = 365 + \frac{242189}{1000000}$$

con un errore di circa mezzo decimo di secondo.

La prima cosa utile che si potrebbe fare è cercare di semplificare la frazione ottenendo così il minimo ciclo di anni in cui, entro la precisione considerata, il numero degli anni è un multiplo esatto del numero dei giorni. Questo può essere fatto convenientemente applicando l'algoritmo Euclideo.

1.1. **Primo interludio: l'algoritmo Euclideo.**

Il problema aperto dalla sezione precedente è quello di ridurre una frazione alla sua forma standard, ovvero *trovare il massimo comune divisore tra due numeri dati*. Questo problema ha una elegante soluzione conosciuta come *algoritmo Euclideo*.

Siano $p, q \in \mathbb{N}$, $p > q$, allora esiste $a_1 \in \mathbb{N}$ tale che

$$p = a_1 q + p_1, \quad p_1 < q \tag{1.1}$$

e

$$\frac{p}{q} = a_1 + \frac{1}{\frac{q}{p_1}}$$

se q e p_1 hanno un divisore comune (chiamiamolo b) allora anche $b|p$ (da (1.1)) e quindi b è divisore comune di p, q. D'altro canto se $b|p$ e $b|q$ allora $b|p_1$ (questa è

Date: April 5, 2019.

[1]Il *solstizio d'estate* è il momento in cui il giorno è il più lungo dell'anno. Nel nostro calendario cade il 21 o il 22 Giungo ed è convenzionalmente considerato l'inizio dell'estate.

[2]Quello riportato sotto è chiamato l'*anno tropicale medio* ed è quello rilevante per quanto riguarda il calendario, non mi addentrerò qui sulla sua differenza con l'anno *siderale* o altri modi di misurare il periodo.

ancora una volta conseguenza di (1.1)). Dunque p, q hanno gli stessi divisori comuni di q, p_1 e quindi lo stesso massimo comune divisore. Poichè

$$q = a_2 p_1 + q_1, \quad q_1 < p_1$$

possiamo scrivere

$$\frac{p}{q} = a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{\frac{p_1}{q_1}}}$$

dove q_1, p_1 hanno gli stessi divisori comuni di q, p_1 e quindi anche di p, q. Questa procedura può essere iterata fino a che non si ottiene un resto nullo. Per esempio se $q_{n-1} = a_{2n} p_n$, cioè $q_n = 0$, allora q_{n-1} e p_n sono entrambi divisibili per p_n e quindi p_n (l'ultimo resto non nullo) è il massimo comune divisore.

Per di più abbiamo ottenuto un'altra maniera univoca di scrivere una frazione chiamata *frazione continua*:

$$\frac{p}{q} = a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \ddots + \cfrac{1}{a_{2n}}}$$

Esempio 1.1. *Si trovi il massimo comune divisore tra* $p = 855$ *e* $q = 266$.

$$\begin{aligned} 855 =& 3 \cdot 266 + 57 \\ 266 =& 4 \cdot 57 + 38 \\ 57 =& 1 \cdot 38 + 19 \\ 38 =& 2 \cdot 19. \end{aligned}$$

Dunque il massimo comune divisore è 19 e si ha la seguente rappresentazione in frazione continua.

$$\frac{855}{266} = 3 + \frac{1}{4 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2}}}$$

1.2. **Alcune rozze approssimazioni.** Applicando l'algoritmo Euclideo al nostro problema si ottiene che il massimo comune divisore è uno e si ha la seguente frazione continua:

$$T_a = 365 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{40 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{5 + \cfrac{1}{5}}}}}}}}} \tag{1.2}$$

Questo significa che, nella precisione considerata, bisognerebbe aspettare un milione di anni perchè il numero degli anni sia un multiplo intero del numero dei giorni, cosa veramente poco utile. D'altro canto possiamo troncare la frazione di cui sopra. Il troncamento più brutale

$$T_a \sim 365$$

era alla base del calendario amministrativo Egiziano composto da dodici mesi e, appunto, 365 giorni. Leggermente meglio è

$$T_a \sim 365 + \frac{1}{4}.$$

Questo suggerisce un ciclo di quattro anni: ogni quattro anni bisogna aggiungere un giorno, cioè ogni quattro anni bisogna avere un anno di 366 giorni, l'anno *bisestile* appunto. Questo è il cosiddetto calendario Giuliano introdotto da Giulio Cesare nel 46 AC (entrato in vigore nel 45 AC detto anche *l'anno della confusione*) su consiglio dell'astronomo Alessandrino Sosigene il quale si basava sulle conoscenze di quello che è stato forse il più grande astronomo di tutti i tempi: Ipparco da Nicea (190 - 120 AC). Questo corrisponde ad un errore di circa 11 minuti. Sosigene era al corrente dell'esistenza di un errore, ma Cesare lo ritenne accettabile. Tuttavia col tempo tale errore divenne importante, per esempio nel 1500 questo aveva prodotto un errore di circa dieci giorni.

Proviamo una approssimazione migliore per capire meglio che succede

$$T_a \sim 365 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{7}} = 365 + \frac{7}{29}$$

il che corrisponde un errore di circa un minuto e suggerisce un ciclo di 29 anni. Quindi un ciclo comune di $4 \times 29 = 116$ anni. Cioè ogni 116 anni ci devono essere 28 extra giorni ma il sistema degli anni bisestili da 29 extra giorni. Una buona soluzione sarebbe di decidere che i secoli non sono bisestili, in questo modo si assume che

$$T_a \sim 365 + \frac{24}{100}$$

con un errore di circa tre minuti.

Ovviamente si può continuare a migliorare l'approssimazione troncamento per troncamento, ma ci si può anche chiedere se esiste un modo sistematico di capire come conviene troncare una frazione continua.

1.3. **Second inderludio: Frazioni continue e loro ridotte.** Si consideri una frazione continua

$$a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \ddots + \cfrac{1}{a_n}}$$

con $a_i \in \mathbb{N}$. Un problema naturale è di riscriverla nella forma $\frac{p_n}{p_n}$. Per farlo consideriamo le *ridotte*

$$C_m := a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \ddots + \cfrac{1}{a_m}}$$

per ogni $m \leq n$. Chiaramente

$$\begin{aligned}
&C_1 = \frac{a_1}{1} =: \frac{p_1}{q_1} &&\Longrightarrow \quad p_1 = a_1;\ q_1 = 1\\
(1.3)\qquad &C_2 = \frac{a_1 a_2 + 1}{a_2} =: \frac{p_2}{q_2} &&\Longrightarrow \quad p_2 = a_1 a_2 + 1;\ q_2 = a_2\\
&C_3 = \frac{(a_1 a_2 + 1)a_3 + a_1}{a_2 a_3 + 1} =: \frac{p_3}{q_3} &&\Longrightarrow \quad p_3 = a_3 p_2 + p_1;\ q_3 = a_3 q_2 + q_1
\end{aligned}$$

sembrerebbe perciò che esista una semplice formula induttiva per calcolare p_i, q_i. Questo è vero e può essere verificato per induzione.

Lemma 1.2. *Per ogni* $3 \leq i \leq n$ *si ha*

$$\begin{aligned}
p_i &= a_i p_{i-1} + p_{i-2}\\
q_i &= a_i q_{i-1} + q_{i-2}
\end{aligned}$$

Proof. Per verificate la formula di cui sopra conviene considerare il caso più generale in cui $a_i \in \mathbb{R}_+$. In tale caso le formule (1.3) sono comunque valide anche se ora p_i, q_i non sono necessariamente interi. In questo contesto si può scrivere

$$C_{i+1} = a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \ddots + \cfrac{1}{a_{i+1}}} = a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \ddots + \cfrac{1}{a_{i-1} + \cfrac{1}{\left[\frac{a_i a_{i+1} + 1}{a_{i+1}}\right]}}}$$

quindi la seconda frazione ha profondità i e l'ultimo termine è il numero, non necessariamente intero, $\frac{a_i a_{i+1}+1}{a_{i+1}}$. Applicando l'ipotesi induttiva si ha

$$C_{i+1} = \frac{\frac{a_i a_{i+1}+1}{a_{i+1}} p_{i-1} + p_{i-2}}{\frac{a_i a_{i+1}+1}{a_{i+1}} q_{i-1} + q_{i-2}} = \frac{a_{i+1} p_i + p_{i-1}}{a_{i+1} q_i + q_{i-1}}.$$

□

Il prossimo passo è di domandarsi quanto cambia una frazione da un troncamento al successivo.

$$C_{i+1} - C_i = \frac{p_{i-1} q_i - p_i q_{i-1}}{q_{i+1} q_i}$$

ma, a causa del Lemma 1.2

$$p_{i-1} q_i - p_i q_{i-1} = -(q_{i-1} p_{i-2} - p_{i-1} q_{i-2})$$

e, iterando questo calcolo, si ottiene

$$C_{i+1} - C_i = \frac{(-1)^i}{q_{i+1} q_i}.$$

A questo punto basta notare che $q_i \geq q_{i-1}$ e dunque $q_i \geq (a_i + 1) q_{i-2} \geq 2 q_{i-2}$. Dunque $q_i \geq 2^k q_{i-2k}$ cioè

$$|C_n - C_{n-2k}| \leq \sum_{j=0}^{2k-1} |C_{n-j} - C_{n-j+1}| \leq \sum_{j=0}^{2k-1} 2^{-\frac{j}{2}} \frac{1}{q_{n-2k}^2} \leq C \frac{1}{q_{n-2k}^2}.$$

La differenza tra una troncata e la frazione originaria è dell'ordine di uno sul quadrato del denominatore. Questa è una approssimazione particolarmente buona per un numero dato ed un dato denominatore, non banale da ottenere.[3]

Si noti infine che nelle stime precedenti si è usato solamente l'ipotesi $a_i > 0$. Chiaramente se un a_i è grande l'approssimazione data dalla corrispondente frazione continua risulta molto più accurata di quanto sopra stimato.

1.4. **Una approssimazione più sofisticata.** Se guardiamo la frazione (1.2) notiamo che ad un certo punto compare il numero, relativamente grande, 40. In base a quanto discusso, questo è un buon punto dove troncare la frazione:

$$T_a \sim 365 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3}}}} = 365 + \frac{31}{128}$$

che da un errore di circa due decimi di secondo e suggerisce un ciclo di 128 anni. Ovvero dice che ogni 128 anni bisogna aggiungere 31 extra giorni. Al contrario il sistema degli anni bisestili aggiunge 32 giorni. Basterebbe quindi non rendere bisestili gli anni divisibili per 128. Questo forse non è uno schema molto proponibile perchè richiede una certa sofisticazione matematica per decidere se l'anno è bisestile oppure no (una divisione con numeri di tre cifre!). Come surrogato si può notare che $128 \times 3 = 384$ dunque in circa quattrocento anni il nostro schema precedente (in cui i secoli non sono bisestili) sopprimerebbe quattro anni bisestili mentre ora vediamo che ne dovremmo sopprimere solo tre. Una semplice possibilità è di mantenere bisestili i secoli divisibili per quattro. Questo è il calendario Gregoriano, correntemente in uso. Esso fu introdotto da Papa Gregorio XIII il 24 Febbraio 1582 (anche se la bolla *Inter gravissimas* è datata 1581 perchè al tempo l'anno cominciava a Marzo) sembra su proposta del Calabrese Luigi Lilo e realizzato sotto la tutela del noto astronomo Christopher Clavius.[4] Dunque il calendario Gregoriano corrisponde and un anno

$$T_a \sim 365 + \frac{97}{400}$$

con un errore di circa mezzo minuto ovvero circa tre ore ogni quattrocento anni,[5] dunque avremo un errore maggiore di un giorno attorno al 5000, sempre se saremo ancora in giro.[6]

[3] L'approssimazione banale di un numero razionale con una frazione di denominatore q da un errore dell'ordine $\frac{1}{q}$, a meno che non dia il risultato esatto. La possibiltà di usare frazioni continue per ottenere buone approssimazioni fu infatti usata, all'inizio dello sviluppo della teoria, da Christian Huygens (1629-1695) per progettare le ruote dentate dei planetari (si veda l'opera postuma: Descriptio Automati Planetari 1698).

[4] Contestualmente furono saltati 10 giorni per riallineare il calendario provocando un certo sconcerto e accuse alla chiesa di "rubare dieci giorni dalla vita delle persone".

[5] Un errore circa 300 volte maggiore dello schema basato su di un ciclo di 128 anni.

[6] In realtà tutta questa discussione è alquanto accademica in quanto il moto terrestre non è veramente costante come supposto. Questo dipende da varie cause la più importante essendo probabilmente l'effetto di marea provocato dalla luna che tende a rallentare la rotazione terrestre, quindi ad accorciare il giorno. Tale effetto, su una scala di 5000 anni, sarebbe più importante dello sfasamento qui discusso. Da questo fatto si ricava un'utile lezione per l'applicazione della matematica: tali applicazioni sono sempre basate su modelli che, come tali, hanno un ambito di

2. Previsioni e numeri irrazionali

Quello che abbiamo visto nella lezione precedente si può modellizare, nell'ambito dei sistemi dinamici, nel modo seguente. Si hanno due moti nel cerchio unitario S^1 definiti da $x = x + \omega_i t \mod 1$, $i \in \{1, 2\}$. Ogni volta che il primo moto passa per il punto zero (diciamo mezza notte nel caso del moto di rivoluzione diurno di cui si discuteva) si osserva il secondo moto. Questo produce una mappa[7] $T : S^1 \to S^1$ definita da $Tx := x + \omega \mod 1$.[8] É facile convincersi che la posizione del secondo moto dopo n rivoluzioni del primo sarà data dalla formula $T^n x = x+n\omega \mod 1$.[9] Abbiamo dunque che la dinamica che ci interessa puó essere rappresentata dall'azione del gruppo $\mathbb{Z}$ sul cerchio S^1 data da (T^n, S^1). Questo si chiama appunto un *sistema dinamico* discreto. Le domande che ci siamo fin qui posti concernevano tutte il comportamento per tempi lunghi. Per esempio: trovare l'$n \in N$ più piccolo per cui $T^n x \in [-10^{-8}, 10^{-8}]$.[10] Si tratta dunque di sapere se esiste $m \in \mathbb{N}$ tale che

$$|n\omega - m| \leq 2 \cdot 10^{-8} \quad \text{ovvero} \quad |\omega - \frac{m}{n}| \leq \frac{2}{n}\, 10^{-8}.$$

Dunque se si approssima ω mediante frazioni continue basta fermarsi quando il denominatore è dell'ordine 10^8, infatti si può mostrare che non è possibile fare di meglio. Se $\omega = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, allora il moto è periodico di periodo q, tuttavia abbiamo visto che se q è grande le frazioni continue sono assai utili, ancora più utili sono se invece $\omega \notin \mathbb{Q}$. Allora diventa essenziale sapere quanto efficientemente ω può essere approssimato da numeri razionali. Sembra naturale pensare di utilizzare le frazioni continue. Vediamo un caso concreto.

3. Da Pitagora a Gauss

Si narra che Pitagora scoprisse che $\sqrt{2}$ non poteva essere un numero razionale e che l'esistenza di numeri non razionali fosse un segreto gelosamente custodito dalla scuola Pitagorica. Poichè il segreto è ormai da tempo stato svelato occupiamoci proprio di questo strano numero: $\sqrt{2}$.

3.1. **Un esempio.** Consideriamo un caso concreto: $\omega = \sqrt{2}$. Una piccola manipolazione algebrica può essere illuminante:

$$\omega^2 = 2 \quad \Longrightarrow \quad (\omega - 1)(\omega + 1) = 1 \quad \Longrightarrow \quad \omega = 1 + \frac{1}{1 + \omega}. \tag{3.1}$$

---

applicabilità ben definito. Se ci si lascia trasportare dall'entusiasmo matematico senza riflettere si rischia di finire con lo studiare effetti così sottili da essere in realtà al di fuori dell' applicabilità del modello e dunque di discutibile interesse per quanto riguarda le applicazioni.

[7] Questa procedura è il caso piú semplice possibile di una procedura generale nota col nome di "sezione di Poincaré".

[8] Dove $\omega = \frac{\omega_2}{\omega_1}$, cioè i, rapporto dei periodi di cui ci siamo occupati nella lezione precedente.

[9] Con la notazione T^n si intende $T \circ T \circ \cdots \circ T$ n volte. Piú precisamente $T^0 = \mathbf{Id}$, $T^1 = T$, $T^2 = T \circ T$ e cosí via. Infatti, poiché la mappa T è invertibile è anche conveniente definite T^{-1} come la mappa inversa, $T^{-2} = T^{-1} \circ T^{-1}$ e cosí via.

[10] Nel caso degli anni e dei giorni, corrisponde a chiedersi quanto occorre aspettare perchè un numero intero di giorni corrisponda ad un numero intero di anni con un errore inferiore al secondo.

Se iteriamo l'ultima uguaglianza si ottiene

$$\omega = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1+\omega}} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1+\omega}}}.$$

Verrebbe dunque la tentazione di scrivere

$$\sqrt{2} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \ddots}}}, \tag{3.2}$$

ma che senso ha tale frazione continua infinita?

Consideriamo la funzione $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ definita da

$$f(x) := 1 + \frac{1}{1+x}$$

allora la frazione (3.2) troncata all'ordine 1 è data da $f(1)$, all'ordine due da $f^2(1)$ e all'ordine n da $f^n(1)$. Ecco un'altro sistema dinamico: $(f^n, \mathbb{R}_+)$.[11] In questo caso ci interessa chiaramente $\lim_{n\to\infty} f^n(1)$, nuovamente una domanda tipica: il comportamento per tempi lunghi.

Dato un sistema dinamico è una buona idea cominciare con lo studiare la possibilità di moti molto semplici. Il moto più semplice di tutti è l'assenza di moto, ovvero un punto fisso per f. L'equazione $f(x) = x$, $x \in \mathbb{R}_+$ ha una sola soluzione: $x = \sqrt{2}$. Il prossimo passo è quello di studiare il moto in un piccolo intorno dei moti semplici. Sia $h \in \mathbb{R}$, piccolo, allora

$$f(\sqrt{2} + h) = f(\sqrt{2}) + f'(\xi)h = \sqrt{2} - \frac{1}{(1+\xi)^2}h$$

per qualche $|\xi - \sqrt{2}| \le h$. Se h è sufficientemente piccolo allora $\xi > 1$ e

$$|f(\sqrt{2} + h) - \sqrt{2}| \le \frac{h}{4}. \tag{3.3}$$

Dunque $\sqrt{2}$ è un punto fisso attrattivo quindi $\lim_{n\to\infty} f^n(1) = \sqrt{2}$.

DIPARTIMENTO DI MATEMATICA, UNIVERSITÀ DI ROMA (TOR VERGATA), VIA DELLA RICERCA SCIENTIFICA, 00133 ROMA, ITALY, liverani@mat.uniroma2.it

[11] Un'azione su $\mathbb{R}_+$ di $\mathbb{N}$, in questo caso.