Fisica Matematica I

Primo Appello, Sessione Autunnale, 8-09-21

Cognome......................... Nome.........................

Avete 3:00 ore di tempo. Ogni esercizio vale 6 punti. Solo le **risposte chiaramente giustificate** saranno prese in considerazione. Le parti degli elaborati scritte in maniera **disordinata** o **incomprensibile** saranno **ignorate**.

1. Si consideri una particella di massa 1 soggetta al potenziale $V(x) = x^2 - x^3$ e attrito γ. Sia $x(0) = -1$, $\dot{x}(0) = 0$ la condizione iniziale. Si mostri che, detta $x(t)$ la posizione della particella al tempo t, se $\gamma \leqslant \frac{5}{9}$ allora esiste un tempo $t_* > 0$ tale che $x(t_*) = 5$.

2. Una barra di densità uno e lunghezza ℓ ha, attaccato ad una estremità, un punto materiale di massa m. Tale barra è libera di muoversi in un piano verticale. Inoltre è presente una forza il cui potenziale, per un punto materiale di massa μ e posizione η, è $V(\eta) = \frac{k\mu}{2}\|\eta\|^2$. Si scrivano le equazioni del moto, si trovino le configurazioni di equilibrio e si esibisca un moto periodico.

3. Dati $a, b \in \mathbb{R}^d$, si mostri che tra tutte le curve differenziabili che connettono a e b la retta è quella più corta.

Soluzione

1. Si noti che V ha un minimo locale in zero e un massimo locale in $2/3$ e $V(x) \geqslant 0$ per ogni $x \leqslant 2/3$, mentre $V'(x) < 0$ per ogni $x > 2/3$ e $V''(x) < 0$ per ogni $x > \frac{1}{3}$.
   Le equazioni del moto sono
   $$\ddot{x} = -V'(x) - \gamma \dot{x}. \tag{1}$$
   Ne segue che se la particella supera il punto $2/3$ al tempo t_1 e $\dot{x}(t_1) = v_1 > 0$ allora esiste $v_2 > 0$ tale che $\dot{x}(t) \geqslant v_2$ per tutti i $t > t_1$. Infatti, se $-V'(x(t_1)) < \gamma \dot{x}(t_1)$ allora la particella rallenterà fino al tempo t_2 in cui $-V'(x(t_2)) = \gamma \dot{x}(t_2)$. Ma allora $\ddot{x}(t_2) = 0$ e
   $$\frac{d^3}{dt^3}x = \frac{d}{dt}[-V'(x) - \gamma \dot{x}](t_2) = -V''(x(t_2))\dot{x}(t_2) > 0.$$
   Ne segue che per $t > t_2$ la particella accellera e quindi $\dot{x}(t) > \dot{x}(t_2)$ e $-V'(x(t)) > \gamma \dot{x}(t)$. Ci siamo quindi ridotti al caso $-V'(x(t)) > \gamma \dot{x}(t)$. Ovvero, esiste sempre un tempo $\bar{t} \geqslant t_1$ tale che $-V'(x(\bar{t})) > \gamma \dot{x}(\bar{t}) > 0$. Se esiste un tempo $t_3 \geqslant \bar{t}$ in cui la particella smette di accellerare allora $-V'(x(t_3)) = \gamma \dot{x}(t_3)$ e, come abbiamo visto, la particella deve nuovamente ricominciare ad accellerare. Dunque $\dot{x}(t) \geqslant \dot{x}(\bar{t})$ per ogni $t \geqslant \bar{t}$ e quindi si avrà $\lim_{t\to\infty} x(t) = \infty$. In particolare, la particella raggiungerà il punto $x = 5$, quindi basta verificare che la particella superi il punto $2/3$.
   Dalla (1) segue che, ponendo $e(t) = \frac{1}{2}\dot{x}^2 + V(x)$,
   $$\dot{e} = -\gamma \dot{x}^2.$$
   Se la particella deve superare $2/3$ allora deve essere $e \geqslant V(2/3) = \frac{4}{27}$. Quindi, poichè $e(t) \leqslant e(0) = 2$ e $V(x) \geqslant 0$ in $[-1, 1]$.
   $$\begin{aligned} e(0) - e(t) &= \gamma \int_0^t \sqrt{2[e(s) - V(x(s))]}\dot{x}(s)ds = \gamma \int_{-1}^{x(t)} \sqrt{2[e(x) - V(x)]}dx \\ &< \gamma \int_{-1}^{x(t)} 2dx = 2\gamma(x(t) + 1). \end{aligned}$$
   Dunque
   $$e(t_1) > 2 - 2\gamma\left(\frac{2}{3} + 1\right) = \frac{4}{27}$$
   ovvero la particella ha abbastanza energia per superare il massimo del potenziale.

2. Consideriamo la barra con un estremo in $(0, 0)$ e l'altro, quello su cui si trova il punto materiale, in $(0, \ell)$. Allora il centro di massa ha coordinate $(x_c, 0)$ dove
   $$x_c = \frac{\int_0^\ell x dx + m\ell}{\ell + m} = \frac{\ell + 2m}{2(\ell + m)}\ell.$$
   Possiamo quindi calcolare il momento di inerzia rispetto al centro di massa:
   $$I = \ell^2 \int_0^\ell (x - x_c)^2 + m(\ell - x_c)^2 = \frac{\ell^6 + 6\ell^5 m + 15\ell^4 m^2 + 4\ell^3 m^3}{12(m + \ell)^3}.$$
   Avendo calcolato il momento di inerzia, possiamo ora introdurre le coordinate lagrangiane. Chiamando $\xi = (x, y)$ le coordinate del centro di massa e θ l'angolo della barra con

l'orizzontale. Allora un punto a distanza z dal centro di massa ha coordinate $\xi + zv(\theta)$, dove $v(\theta) = (\cos\theta, \sin\theta)$. Possiamo quindi calcolare il potenziale

$$\begin{aligned} V(\xi,\theta) &= \int_{-\frac{\ell+2m}{2(\ell+m)}\ell}^{\frac{\ell^2}{2(\ell+m)}} dz \frac{k}{2}\left(\|\xi\|^2 + 2z\langle\xi, v(\theta)\rangle + z^2\right) + \frac{km}{2}\left(\|\xi\|^2 + \frac{\ell^2\langle\xi, v(\theta)\rangle}{(\ell+m)} + \left[\frac{\ell^2}{2(\ell+m)}\right]^2\right) \\ &= \frac{k(m+\ell)}{2}\|\xi\|^2 + C, \end{aligned}$$

per qualche costante C. La Lagrangiana ha quindi la forma

$$\mathcal{L} = \frac{m+\ell}{2}\dot{\xi}^2 + \frac{I}{2}\dot{\theta}^2 - (m+\ell)y - \frac{k(m+\ell)}{2}\|\xi\|^2.$$

Dunque le equazioni del moto sono

$$\begin{aligned} \ddot{\xi} &= -e_2 - k\xi \\ I\ddot{\theta} &= 0. \end{aligned}$$

Le configurazioni di equilibrio sono quindi $\xi = (0, -\frac{1}{k})$, $\dot{\xi} = (0,0)$, $\dot{\theta} = 0$, per qualunque valore di θ.

Se introduciamo le variabili $\eta = \xi + \frac{1}{k}$, ne segue che

$$\ddot{\eta} = -k\eta.$$

Dunque tutti i moti in ξ sono periodici con frequenza $\omega = \sqrt{k}$. Si ha quindi un moto periodico se e solo se $\theta(t) = \frac{\omega}{2\pi}t + \theta_0 \mod 2\pi$.

3. Sia $\Gamma = \{x \in \mathcal{C}^1([0,1], \mathbb{R}^d) \ : \ x(0) = a, x(1) = b\}$ l'insieme delle curve differenziabili che connettono a e b.[1] La lunghezza di $x \in \Gamma$ è

$$\ell(x) = \int_0^1 \|\dot{x}(s)\| ds.$$

Sfortunatamente la funzione $\mathcal{L}(x,v) = \|v\|$ non è differenziabile in zero e quindi non la possiamo considerare una Lagrangiana regolare. Tuttavia per ogni $\varepsilon > 0$ la funzione $\mathcal{L}_\varepsilon(x,v) = \sqrt{\langle v, v\rangle + \varepsilon}$ è differenziabile e può quindi essere interpretata come una Lagrangiana regolare. Inoltre, se definiamo

$$\ell_\varepsilon(x) = \int_0^1 \mathcal{L}_\varepsilon(\dot{x}(s)) ds$$

abbiamo

$$\ell(x) \leqslant \ell_\varepsilon(x) = \int_0^1 \sqrt{\langle \dot{x}(s), \dot{x}(s)\rangle + \varepsilon} \leqslant \ell(x) + \sqrt{\varepsilon}. \tag{2}$$

È quindi ragionevole pensare che lo studio di ℓ_ε possa fornire informazioni su ℓ. Studiamone i punti critici usando le equazioni di Eulero-Lagrange:

$$0 = \frac{d}{dt}\partial_{\dot{x}}\mathcal{L}_\varepsilon(x,\dot{x}) = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\frac{\dot{x}}{\sqrt{\langle\dot{x},\dot{x}\rangle + \varepsilon}} = \frac{1}{2}\frac{\ddot{x}}{\sqrt{\langle\dot{x},\dot{x}\rangle + \varepsilon}} - \frac{1}{4}\frac{\dot{x}\langle\ddot{x},\dot{x}\rangle}{[\langle\dot{x},\dot{x}\rangle + \varepsilon]^{\frac{3}{2}}}. \tag{3}$$

[1] La scelta di $[0,1]$ è arbitraria, ma leggittima, poichè la lunghezza di una curva non dipende dalla sua parametrizzazione.

Se moltiplichiamo l'equazione per $2\dot{x}[\langle \dot{x}, \dot{x}\rangle + \varepsilon]^{\frac{3}{2}}$ otteniamo

$$0 = \langle \ddot{x}, \dot{x}\rangle \left\{ \langle \dot{x}, \dot{x}\rangle + \varepsilon - \frac{1}{2}\langle \dot{x}, \dot{x}\rangle \right\} = \langle \ddot{x}, \dot{x}\rangle \left\{ \frac{1}{2}\langle \dot{x}, \dot{x}\rangle + \varepsilon \right\}$$

che implica $\langle \ddot{x}, \dot{x}\rangle = 0$. Usando questa informazione l'equazione (3) diventa $\ddot{x} = 0$. Da cui segue che $\bar{x}(s) = a + s(b-a)$ è l'unico punto critico di ℓ_ε. Per verificare se è un minimo consideriamo una piccola funzione ξ tale che $\xi(0) = \xi(1) = 0$ e cerchiamo di calcolare $\ell_\varepsilon(\bar{x} + \xi)$. Ricordiamo lo sviluppo

$$\sqrt{a+\xi} = \sqrt{a} + \frac{1}{2}a^{-\frac{1}{2}}\xi - \frac{1}{8}a^{-\frac{3}{2}}\xi^2 + \frac{1}{6}a_\xi^{-5/2}\xi^3$$

dove $a_\xi \in (a, a+\xi)$. Se ξ è sufficientemente piccolo si ha quindi

$$\sqrt{a+\xi} \geqslant \sqrt{a} + \frac{1}{2}a^{-\frac{1}{2}}\xi - \frac{1}{16}a^{-\frac{3}{2}}\xi^2.$$

Da cui segue

$$\begin{aligned}\ell_\varepsilon(\bar{x}+\xi) - \ell(\bar{x}) \geqslant &\int_0^1 \frac{1}{2}[\|b-a\|^2 + \varepsilon]^{-\frac{1}{2}}[2\langle \dot{\xi}, b-a\rangle + \|\dot{\xi}\|^2] \\ &- \int_0^1 \frac{1}{16}[\|b-a\|^2+\varepsilon]^{-\frac{3}{2}}[2\langle \dot{\xi}, b-a\rangle + \|\dot{\xi}\|^2]^2.\end{aligned}$$

poichè $\int_0^1 \dot{\xi} = \xi(1) - \xi(0) = 0$, abbiamo

$$\begin{aligned}\ell_\varepsilon(\bar{x}+\xi) - \ell(\bar{x}) \geqslant &\int_0^1 \frac{1}{4}[\|b-a\|^2 + \varepsilon]^{-\frac{1}{2}}\|\dot{\xi}\|^2 \\ &- \int_0^1 \frac{1}{16}[\|b-a\|^2+\varepsilon]^{-\frac{3}{2}}[4\|\dot{\xi}\|^3\|b-a\| + \|\dot{\xi}\|^4] \geqslant 0\end{aligned}$$

se ξ è sufficientemente piccolo, dunque $\bar{x}$ è un minimo. Inoltre si noti che la funzione $\sqrt{\langle v, v\rangle + \varepsilon}$ è convessa, perciò anche ℓ_ε è convessa, quindi $\bar{x}$ è un minimo globale.

Per concludere, sia $\beta = \inf_{x\in\Gamma} \ell(x)$. Per definizione $\beta \geqslant 0$, inoltre

$$\beta \leqslant \ell(\bar{x}) \leqslant \ell_\varepsilon(\bar{x}) = \sqrt{\|b-a\|^2 + \varepsilon}$$

in aggiunta, ricordando (2),

$$\ell(x) \geqslant \ell_\varepsilon(x) - \sqrt{\varepsilon} \geqslant \ell_\varepsilon(\bar{x}) - \sqrt{\varepsilon} = \sqrt{\|b-a\|^2+\varepsilon} - \sqrt{\varepsilon}$$

implica $\beta \geqslant \sqrt{\|b-a\|^2+\varepsilon} - \sqrt{\varepsilon}$. Per l'arbitrarietà di ε, si ha $\beta = \|b-a\|$. Poichè $\ell(\bar{x}) = \|b-a\|$, si ha che $\bar{x}$ è un minimo per ℓ.