Chapter 2

Equazioni differenziali ordinarie (il minimo)

Abbiamo visto che il moto di una particella è descritto da una equazione differenziale, inoltre abbiamo visto che è spesso conveniente approssimare l'equazione differenziale, ma questo ci porta a chiederci: quanto vicine sono le soluzioni della equazione differenziale approssimata alle soluzioni di quella vera? È quindi opportuno ricordare alcuni fatti fondamentali delle equazioni differenziali, delle loro soluzioni e della loro stabilità rispetto a piccole perturbazioni. Il lettore esperto può tranquillamente saltare questo capitolo.

2.1 Generalità

Una equazione differenziale (del primo ordine) è una relazione del tipo

$$f(x(t), \dot{x}(t), t) = 0$$

che deve valere per ogni t in un intervallo aperto $I \subset \mathbb{R}$. Dove $x \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R}^d)$ e $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^{2d+1}, \mathbb{R})$.¹ Questa formulazione è un poco troppo generale per essere utile. Solitamente si è interessati a casi in cui $\partial_y f(x, y, t) \neq 0$. In questa situazione è possibile (nell'intorno di un punto (x, y, t)) applicare il teorema della funzione implicita e scrivere l'equazione differenziale nella forma

$$\dot{x}(t) = V(x(t), t). \tag{2.1.1}$$

Da ora in poi, per semplicità, supporremo $V \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^{d+1}, \mathbb{R}^d)$. La funzione V è sovente chiamata *campo vettoriale*. Il caso più semplice è quello in cui V non dipende da x , allora si ha $\dot{x}(t) = V(t)$. Ovvero x è la primitiva di V . È dunque

¹Con $C^r(A, \mathbb{R}^m)$, $A = \dot{A} \subset \mathbb{R}^n$, e $m, r \in \mathbb{N}$, si intende lo spazio vettoriale delle funzioni da A a $\mathbb{R}^m$ differenziabili r volte in ogni punto e con derivate r -esime continue. In effetti è possibile considerare f meno regolari che C^1 , ma rendiamoci la vita semplice.

chiaro che (2.1.1) non ha, in generale, una unica soluzione (ammesso che ne abbia una). Per determinare unicamente la soluzione occorre, almeno, specificare il valore di x ad un tempo fissato. Si ha così quello che viene comunemente chiamato il *problema di Cauchy*

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= V(x(t), t) \\ x(t_0) &= x_0.\end{aligned}\tag{2.1.2}$$

Allora il teorema di esistenza e unicità per le equazioni differenziali afferma che esiste un intervallo aperto $I \ni x_0$ e una funzione $x \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R}^d)$ tale che (10.2.1) è soddisfatta in I . Inoltre, qualunque altra funzione differenziabile che soddisfa (10.2.1) in un intervallo $J \ni x_0$ deve coincidere con x in $I \cap J$.

Si noti che l'intervallo I fa parte delle incognite del problema e potrebbe essere molto piccolo. Si considerino, ad esempio, i problemi unidimensionali

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \text{sign}(x)|x|^a \\ x(0) &= b,\end{aligned}\tag{2.1.3}$$

con $a, b \geq 0$. Si noti che se $b > 0$, allora la soluzione, per continuità, è diversa da zero per t sufficientemente piccolo. Dunque, per $x > 0$,

$$1 = x^{-a}\dot{x}$$

e integrando entrambi i membri da zero a t si ottiene

$$t = \frac{x(t)^{1-a}}{1-a} - \frac{b^{1-a}}{1-a}.$$

Da cui

$$x(t) = [b^{1-a} + (1-a)t]^{\frac{1}{1-a}}.$$

Ne segue che se $a > 1$, allora la soluzione esplose per $t = b^{1-a}(a-1)^{-1}$. D'altro canto se $a < 1$, allora $\text{sign}(x)|x|^a$ non è differenziabile in zero e quindi ci si può aspettare che qualcosa di strano accada. Infatti, sebbene la derivazione sia stata fatta per $b > 0$, si può controllare che, se $b = 0$, $x(t) = [(1-a)t]^{\frac{1}{1-a}}$ è soluzione. Dunque la soluzione esiste, tuttavia è facile verificare che, per ogni $t_1 \in \mathbb{R}_{\geq 0}$,

$$x(t) = \begin{cases} 0 & \text{for } t \leq t_1 \\ [(1-a)(t-t_1)]^{\frac{1}{1-a}} & \text{for } t > t_1 \end{cases}$$

è $\mathcal{C}^1$ ed è soluzione di (2.1.3) con $b = 0$. Dunque se il campo vettoriale ha poca regolarità l'unicità delle soluzioni può venire a mancare in maniera abbastanza drammatica.

Si noti che se V non dipende dal tempo e (10.2.1) ha una soluzione nell'intervallo $I = (a, b)$ e $\sup_{t \in I} \|x(t)\| = M < \infty$ allora

$$\sup_{t \in I} \|\dot{x}(t)\| = \sup_{t \in I} \|V(x(t))\| \leq \sup_{\|x\| \leq M} \|V(x)\| < \infty.$$

Esercizio 2.1.1. *Si dimostri che se $\sup_{t \in I} \|x(t)\| < \infty$, allora esiste $\lim_{t \rightarrow b} x(t)$ e $\lim_{t \rightarrow a} x(t)$. Inoltre, questo implica che l'intervallo di esistenza delle soluzioni può essere esteso.*

2.2 Disuguaglianza di Gronwall

Poichè abbiamo visto che la soluzione di una equazione differenziale si può sempre prolungare a meno che non esploda, è importante essere in grado di stimare come crescono le soluzioni. Uno strumento fondamentale per questo scopo è il seguente.

Lemma 2.2.1 (Disuguaglianza integrale di Gronwall). *Siano $L, T \in \mathbb{R}_+$ e $\xi, f \in \mathcal{C}^0([0, T], \mathbb{R})$. Se, per ogni $t \in [0, T]$,*

$$\xi(t) \leq L \int_0^t \xi(s) ds + f(t),$$

allora

$$\xi(t) \leq f(t) + L \int_0^t e^{L(t-s)} f(s) ds.$$

Proof. Consideriamo prima il caso $f \equiv 0$. In tal caso il Lemma afferma semplicemente $\xi(t) \leq 0$. Poichè ξ è una funzione continua, esiste $t_* \in [0, (2L)^{-1}] \cap [0, T] =: I_1$ tale che $\xi(t_*) = \sup_{t \in I_1} \xi(t)$. Allora,

$$\xi(t_*) \leq L \int_0^{t_*} \xi(s) ds \leq \xi(t_*) L t_* \leq \frac{1}{2} \xi(t_*)$$

che implica $\xi(t_*) \leq 0$, quindi $\xi(t) \leq 0$ per ogni $t \in I_1$. Se $I_1 = [0, T]$, abbiamo dimostrato quanto volevamo. Altrimenti, ponendo $t_1 := (2L)^{-1}$ si ha

$$\xi(t) \leq L \int_{t_1}^t \xi(s) ds$$

e possiamo ripetere il ragionamento precedente per l'intervallo $[t_1, 2t_1]$. Iterando questo modo di procedere si ha $\xi(t) \leq 0$ per tutti $t \in [0, T]$.

Il caso generale si riduce a quello appena trattato. Sia

$$\zeta(t) := \xi(t) - f(t) - L \int_0^t e^{L(t-s)} f(s) ds.$$

Allora

$$\begin{aligned} \zeta(t) &\leq L \int_0^t \xi(s) ds - \int_0^t L e^{L(t-s)} f(s) ds \\ &= L \int_0^t \zeta(s) ds + L \int_0^t ds \left\{ f(s) + L \int_0^s e^{L(s-\tau)} f(\tau) d\tau \right\} \\ &\quad - \int_0^t L e^{L(t-s)} f(s) ds. \end{aligned}$$

Si noti che

$$\begin{aligned} \int_0^t ds L \int_0^s e^{L(s-\tau)} f(\tau) d\tau &= L \int_0^t d\tau f(\tau) \int_\tau^t ds e^{L(s-\tau)} \\ &= \int_0^t f(s) \{e^{L(t-s)} - 1\} ds. \end{aligned}$$

Quindi,

$$\zeta(t) \leq L \int_0^t \zeta(s) ds.$$

Abbiamo quindi ridotto il problema al caso precedente. Quindi $\zeta(t) \leq 0$ da cui segue quello che vogliamo. $\square$

Ecco una semplice, ma importante, applicazione.

Lemma 2.2.2. *Per ogni $A \in C^0(\mathbb{R}, M(d \times d))$,² Si consideri il problema di Cauchy*

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A(t)x(t) \\ x(0) &= x_0. \end{aligned}$$

Allora, ponendo $L_t = \sup_{|s| \leq t} \|A(s)\|$, $\|x(t)\| \leq e^{L_t t} \|x_0\|$ per tutti $0 \leq t \leq T$. In particolare, la soluzione è definita su tutto $\mathbb{R}$.

Proof. Scriviamo l'equazione in forma integrale: per ogni $t > 0$ e $t_1 < t$

$$\|x(t_1)\| \leq \|x_0\| + \int_0^{t_1} \|A(s)x(s)\| ds \leq \|x_0\| + L_t \int_0^{t_1} \|x(s)\| ds.$$

Ponendo $\xi(t_1) := \|x(t_1)\|$ e applicando il Lemma 2.2.1 si ha il risultato annunciato. $\square$

2.3 Studio qualitativo ingenuo delle equazioni differenziali

Abbiamo visto che il caso più semplice di equazione differenziale corrisponde a trovare la primitiva di una funzione. È ben noto che questo problema non sempre ammette una soluzione esplicita in termini di funzioni elementari. Non è quindi sorprendente che lo stesso capitò (molto più facilmente) per quasi tutte le equazioni differenziali. Tuttavia a volte si possono ottenere precise informazioni qualitative sulla soluzione anche senza una formula esplicita. Questo modo di ragionare si chiama *studio qualitativo*. Si tratta di un campo molto vasto e che richiede una notevole teoria, tuttavia nei casi più semplici (quelle che chiamo studio qualitativo ingenuo) è sufficiente un poco di buon senso. In fatti, in un certo senso, siete come il tizio che ha scoperto di avere parlato in prosa tutta la vita senza saperlo.

Per cominciare consideriamo il caso $d = 1$. In questo caso la soluzione sarà la funzione reale di una variabile $x(t)$. Se vogliamo avere una idea intuitiva di come è fatta ci hanno insegnato che dobbiamo tracciarne il grafico. Ma come si fa a tracciare il grafico? Si studia la derivata. Ora $\dot{x} = V(x, t)$, quindi non c'è nessuna difficoltà a studiare la derivata e tutto quello che sapete su come tracciare il grafico di una funzione si applica immediatamente.

²Con $M(d \times d)$ si intende lo spazio delle matrici reali $d \times d$.

Esercizio 2.3.1. *Si studino le soluzioni di*

$$\begin{aligned}\dot{x} &= e^{-x^2} + x - 2 = V(x) \\ x_0 &= 0.\end{aligned}$$

Esercizio 2.3.2. *Si studino le soluzioni di*

$$\begin{aligned}\dot{x} &= 1 - 2tx \\ x_0 &= a.\end{aligned}$$

Consideriamo ora il caso $d = 2$. Quanto detto sopra è ancora vero, tuttavia sappiamo che tracciare il grafico di una funzione di due variabile è assai più complicato che tracciare quello di una. Tuttavia esistono trucchi per semplificarci la vita. Ad esempio, consideriamo il sistema

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= V_1(x_1, x_2) \\ \dot{x}_2 &= V_2(x_1, x_2)\end{aligned}$$

con $V_2(x) \neq 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}^2$. Allora ne segue che x_2 è una funzione invertibile di t e si può quindi usare la coordinata x_2 per parametrizzare il moto invece che t . Questo corrisponde ad ignorare la velocità con cui il moto percorre l'orbita e a concentrarsi solo sulla forma dell'orbita. Così facendo, dopo aver posto $z(x_2(t)) = x_1(t)$, si ottiene

$$z'(x_2) = \frac{V_1(z(x_2), x_2)}{V_2(z(x_2), x_2)}.$$

Ci siamo quindi ridotti al caso di una singola equazione differenziale e possiamo quindi applicare le idee precedenti. Per esercitarsi si faccia il seguente esercizio e si confronti **poi** la soluzione con la discussione nella Sezione 2.6.

Esercizio 2.3.3. *Si applichino le idee precedenti allo studio della equazione*

$$\ddot{x} - (1 - 3x^2)\dot{x} + x = 0.$$

2.4 Dipendenza da un parametro

Avendo stabilito l'esistenza e l'unicità delle soluzioni, la prossima domanda naturale è:

Domanda: Come dipendono le soluzioni dalle condizioni iniziali? Come dipendono le soluzioni da un parametro nel campo vettoriale?

Teorema 2.4.1 (Dipendenza liscia da un parametro). *Sia $V \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^{d+1+m}, \mathbb{R}^d)$. Si assuma che esista $C_0 > 0$ tale che $\|\partial_x V\|_{\mathcal{C}^1} + \|\partial_\lambda V\|_{\mathcal{C}^1} < C_0$ per ogni $x \in \mathbb{R}^d$.³ Quindi per ogni $x_0 \in \mathbb{R}^d$ e $\lambda \in \mathbb{R}^m$ il problema di Cauchy*

$$\begin{aligned}\dot{x} &= V(x, t, \lambda) \\ x(0) &= x_0\end{aligned}\tag{2.4.1}$$

³Data una funzione $f \in \mathcal{C}^0(A, \mathbb{R}^k)$ poniamo $\|f\|_{\mathcal{C}^0} = \sup_{z \in A} \|f(z)\|$ e $\|f\|_{\mathcal{C}^1} = \|f\|_{\mathcal{C}^0} + \sup_{z \in A} \|\partial_z f(z)\|$.

ammette una soluzione $C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^d)$, chiamiamola $X(t, x_0, \lambda)$. Allora, per ogni $(x_0, t) \in \mathbb{R}^{d+1}$, $X(t, x_0, \cdot) \in C^1(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^d)$. Inoltre detto $\xi(t) = \partial_\lambda X(t, x_0, \lambda)$,⁴ si ha

$$\begin{aligned}\dot{\xi}(t) &= \partial_x V(X(t, x_0, \lambda), t, \lambda) \cdot \xi(t) + \partial_\lambda V(X(t, x_0, \lambda), t, \lambda) \\ \xi(0) &= 0,\end{aligned}\tag{2.4.2}$$

Infine, per ogni $x_0 \in \mathbb{R}^d$ e $\lambda \in \mathbb{R}^m$, esistono $c_1, c_2 > 0$ tali che, per ogni $h \in \mathbb{R}^m$ e $|t| \leq c_1 \ln \|h\|^{-1}$, si ha⁵

$$\|X(t, x_0, \lambda + h) - X(t, x_0, \lambda) - \xi(t)h\| \leq c_2 \|h\|^{\frac{3}{2}}.$$

Proof. Prima di tutto si noti che il campo vettoriale dell'equazione (2.4.2) è lineare in ξ e dunque, come per (2.4.1), la soluzione esiste per tutti i tempi e, da una semplice applicazione del Lemma di Gronwall, $\|X(t) - x_0\| \leq e^{C_1 t}$ e $\|\xi(t)\| \leq e^{C_1 t}$ per una qualche costante $C_1 > 0$.

Il prossimo passo consiste nel dimostrare che, dati $(t, x_0, \lambda) \in \mathbb{R}^{1+d+m}$, per ogni $h \in \mathbb{R}^m$ abbastanza piccolo, ponendo $\zeta(t, h, \lambda) := X(t, x_0, \lambda + h) - X(t, x_0, \lambda) - \xi(t)h$, si ha $\|\zeta(t, h)\| \leq C \|h\|^2$ per qualche costante $C > 0$. Da questo segue immediatamente che ξ è il differenziale rispetto a λ di X . Si noti che $\zeta(0) = 0$.

Dalla formula di Taylor al secondo ordine segue che, per ogni $t \in \mathbb{R}$,⁶

$$\begin{aligned}V(X(t, x_0, \lambda + h), t, \lambda + h) &= V(X(t, x_0, \lambda), t, \lambda) \\ &\quad + \partial_x V(X(t, x_0, \lambda), t, \lambda)(X(t, x_0, \lambda + h) - X(t, x_0, \lambda)) \\ &\quad + \partial_\lambda V(X(t, x_0, \lambda), t, \lambda)h \\ &\quad + \mathcal{O}(\|X(t, x_0, \lambda + h) - X(t, x_0, \lambda)\|^2 + \|h\|^2).\end{aligned}$$

Possiamo quindi scrivere

$$\begin{aligned}\dot{\zeta}(t, h) &= V(X(t, x_0, \lambda + h), t, \lambda + h) - V(X(t, x_0, \lambda), t, \lambda) \\ &\quad - \partial_x V(X(t, x_0, \lambda), t) \cdot \xi(t)h - \partial_\lambda V(X(t, x_0, \lambda), t, \lambda)h \\ &= \partial_x V(X(t, x_0, \lambda), t) \cdot \zeta(t, h) + R(t)\end{aligned}\tag{2.4.3}$$

dove $R(t)$ è una funzione continua in t tale che

$$\begin{aligned}\|R(t)\| &\leq C_2 (\|X(t, x_0, \lambda + h) - X(t, x_0, \lambda)\|^2 + \|h\|^2) \\ &\leq 2C_2 (\|\zeta(t, h)\|^2 + (1 + \|\xi(t)\|^2)\|h\|^2).\end{aligned}$$

Concludiamo usando nuovamente il Lemma di Gronwall. Sia $T_h \geq 0$ il tempo più piccolo per cui $\|\zeta(t, h)\| \leq \frac{C_0}{2C_2}$. Allora, per $t \leq T_h$, (2.4.3) implica

$$\|\zeta(t, h)\| \leq 2C_0 \int_0^t \|\zeta(s)\| ds + \frac{2C_2}{C_1} e^{2C_1 t} \|h\|^2.$$

⁴Si noti che ξ ha valori nell'insieme delle matrici $M(d \times m) \sim \mathbb{R}^{dm}$ e che dipende da λ, x_0 . Eviteremo di scrivere $\xi(t, x_0, \lambda)$, ove possibile, per alleggerire la notazione.

⁵La scelta della potenza $\frac{3}{2}$ è completamente arbitraria. Il punto è che si può ottenere qualunque esponente nell'intervallo (1, 2) a patto di scegliere c_1 in maniera opportuna.

⁶Per $a = \mathcal{O}(b)$ qui intendiamo che $\|a\| \leq C_2 b$ per una costante fissata indipendente da t .

Applicando il Lemma 2.2.1 segue esiste $C_3 > 0$ tale che

$$\|\zeta(t, h)\| \leq C_3(e^{2C_1 t} + e^{2C_0 t})\|h\|^2.$$

Si noti che la stima di cui sopra implica che $\lim_{h \rightarrow 0} T_h = \infty$. Da questa stima segue sia la differenziabilità che l'ultima stima del Teorema. La continuità della derivata è usualmente ottenuta usando la continuità rispetto ad un parametro nel campo vettoriale per l'equazione (2.4.2) (teorema facile, ma che non abbiamo dimostrato). Tuttavia è istruttivo il seguente argomento alternativo: abbiamo visto che esiste una costante $c \geq 2 \max\{C_0, C_1\}$ tale che, per ogni $t \leq T$ e per ogni $h, v \in \mathbb{R}^m$ sufficientemente piccoli, si ha

$$\begin{aligned} \|[\xi(t, \lambda + v) - \xi(t, \lambda)]h\| &\leq \|X(t, x_0, \lambda + h + v) - X(t, x_0, \lambda + v) - \xi(t, \lambda + v)h\| \\ &\quad + \|X(t, x_0, \lambda + h) - X(t, x_0, \lambda) - \xi(t, \lambda)h\| \\ &\quad + \|X(t, x_0, \lambda + h + v) - X(t, x_0, \lambda + h) - \xi(t, \lambda + h)v\| \\ &\quad + \|X(t, x_0, \lambda + v) - X(t, x_0, \lambda) - \xi(t, \lambda)v\| \\ &\quad + \|\xi(t, \lambda + h)v - \xi(t, \lambda)v\| \\ &\leq 2ce^{cT}(\|h\|^2 + \|v\|^2) + \|\xi(t, \lambda + h) - \xi(t, \lambda)\| \|v\|. \end{aligned}$$

Ne segue che, per ogni $\varepsilon > 0$,

$$\begin{aligned} \Delta(\varepsilon) &:= \sup_{\|v\| \leq \varepsilon} \|\xi(t, \lambda + v) - \xi(t, \lambda)\| = \sup_{\frac{1}{2}\|h\| \leq \|v\| \leq \varepsilon} 2^{-1}\varepsilon^{-1} \|[\xi(t, \lambda + v) - \xi(t, \lambda)]h\| \\ &\leq \frac{5ce^{cT}}{2}\varepsilon + \frac{1}{2} \sup_{\|h\| \leq 2\varepsilon} \|\xi(t, \lambda + h) - \xi(t, \lambda)\| \\ &\leq \frac{5ce^{cT}}{2}\varepsilon + \frac{1}{2}\Delta(2\varepsilon). \end{aligned}$$

Possiamo quindi mostrare, per induzione,

$$\Delta(\varepsilon) \leq 5ce^{cT}\varepsilon + 2^{-n}\Delta(2^n\varepsilon).$$

Scegliendo n tale che $\varepsilon^{-1} \leq 2^n \leq 2\varepsilon^{-1}$ si ha

$$\Delta(\varepsilon) \leq 5ce^{cT}\varepsilon + 8\varepsilon \sup_{\|\sigma - \lambda\| \leq 2} \|\xi(t, \sigma)\| \leq (5c + 8)\varepsilon e^{cT},$$

da cui segue

$$\lim_{\|v\| \rightarrow 0} \|\xi(t, \lambda + v) - \xi(t, \lambda)\| = 0$$

come annunciato. □

Esercizio 2.4.2. *Provare la prima affermazione del Teorema 2.4.1 sotto l'ipotesi, più debole, $V \in \mathcal{C}^1$.*

Corollario 2.4.3 (Dipendenza liscia dalle condizioni iniziali). *Sia $V \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^{d+1}, \mathbb{R}^d)$, come nel Lemma precedente. Per ogni $x_0 \in \mathbb{R}^d$ sia $X(t, x_0)$ l'unica soluzione*

del problema di Cauchy allora, $X(t, \cdot) \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$ e $\xi = \partial_{x_0} X$ è la soluzione di

$$\begin{aligned}\dot{\xi}(t) &= \partial_x V(X(t, x_0), t) \cdot \xi(t) \\ \xi(0) &= \mathbb{1}.\end{aligned}\tag{2.4.4}$$

Inoltre, per ogni $x_0 \in \mathbb{R}^d$ e $\lambda \in \mathbb{R}^m$, esistono $c_1, c_2 > 0$ tali che, per ogni $h \in \mathbb{R}^m$ e $|t| \leq c_1 \ln \|h\|^{-1}$, si ha

$$\|X(t, x_0 + h) - X(t, x_0) - \xi(t)h\| \leq C_2 \|h\|^{\frac{3}{2}}.$$

Proof. Si ponga $z = x - x_0$. Allora z soddisfa l'equazione

$$\begin{aligned}\dot{z} &= V(z + x_0, t) =: \bar{V}(z, t, x_0) \\ z(0) &= 0.\end{aligned}$$

Si può quindi considerare x_0 come un parametro. Il risultato voluto segue quindi applicando il Teorema 2.4.1. $\square$

Un problema naturale che appare nello studio della evoluzione delle equazioni differenziali è il seguente: se si considera un insieme di condizioni iniziali, e si osserva il sistema al tempo t , come si è evoluto questo insieme? Questo è in generale un problema molto difficile, tuttavia se uno si accontenta di sapere come cambia la misura dell'insieme a cosa è assai più semplice. Detta infatti $x(t, x_0)$ la soluzione con dato iniziale x_0 e un insieme A , sia $A_t = \{z \in \mathbb{R}^d : \exists x_0 \in A \text{ tale che } x(t, x_0) = z\}$, allora (usando la formula per il cambio di variabile in un integrale multiplo)

$$\int_{A_t} dz = \int_A \det(\partial_{x_0} x(t, x_0)) dx_0.$$

Il problema si riduce quindi allo studio di $\eta = \det(\xi)$.

Teorema 2.4.4 (Teorema di Liouville). *Con la notazione di cui sopra*⁷

$$\begin{aligned}\dot{\eta} &= \text{Tr}(\partial_x V(X(t, x_0), t))\eta \\ \eta(0) &= 1.\end{aligned}$$

Proof. Per comodità poniamo $A(t) = \partial_x V(X(t, x_0), t)$. Poichè $\det(\xi(0)) = \det(\mathbb{1}) = 1$, per continuità $\eta(t) \neq 0$ per t piccoli. In tal caso calcoliamo⁸

$$\begin{aligned}\det(\xi(t+h)) &= \det(\xi(t) + \dot{\xi}(t)h + o(h)) = \det(\xi(t) + A(t)\xi(t)h + o(h)) \\ &= \det(\mathbb{1} + A(t)h + o(h)) \det(\xi(t)) = \det(e^{A(t)h + o(h)}) \det(\xi(t)).\end{aligned}$$

Esercizio 2.4.5. *Si verifichi che per qualsiasi coppia di matrici $d \times d$ A, U , con $\det U \neq 0$, si ha*

$$\text{Tr}(A) = \text{Tr}(UAU^{-1}).$$

(Suggerimento, si mostri che, per ogni tre matrici A, B, C , $\text{Tr}(ABC) = \text{Tr}(CAB)$.)

⁷Con $\text{Tr}(A)$ si intende la traccia della matrice A , ovvero $\sum_i A_{i,i}$.

⁸Se non conoscete il significato di e^A , fate l'Esercizio 2.5.3.

Esercizio 2.4.6. Si verifichi che per ogni matrice $d \times d$ A si ha

$$\det(e^A) = e^{\text{Tr}(A)}.$$

(Suggerimento: si consideri prima il caso in A è diagonalizzabile, poi si consideri il caso in cui presenti blocchi di Jordan.)

Usando i due esercizi precedenti possiamo scrivere

$$\begin{aligned} \dot{\eta}(t) &= \lim_{h \rightarrow 0} h^{-1} [\det(\xi(t+h)) - \det(\xi(t))] = \lim_{h \rightarrow 0} h^{-1} \left[e^{\text{Tr}(A(t)h + o(h))} - 1 \right] \eta(t) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} [\text{Tr}(A(t)) + o(1)] \eta(t) = \text{Tr}(A(t)) \eta(t). \end{aligned}$$

□

Sia $V \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$ un campo vettoriale e $\bar{x} \in \mathbb{R}^d$ tale che $V(\bar{x}) = 0$. Allora $x(t) = \bar{x}$ è una soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{aligned} \dot{x} &= V(x) \\ x(0) &= \bar{x}. \end{aligned} \tag{2.4.5}$$

Ci si può quindi chiedere che succede per condizioni iniziali che differiscono di poco da $\bar{x}$. Sappiamo che le soluzioni dipendono con continuità dal dato iniziale e la derivata in $\bar{x}$ è data dalla soluzione dell'equazione

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= DV(\bar{x})\xi \\ \xi(0) &= \mathbb{1}. \end{aligned} \tag{2.4.6}$$

Sembra quindi essenziale comprendere per prima cosa le equazioni lineari.

2.5 Equazioni lineari

Sia A una matrice $d \times d$ e si consideri l'equazione differenziale

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax \\ x(0) &= x_0 \end{aligned} \tag{2.5.1}$$

con $x \in \mathbb{R}^d$. Dalla sezione precedente sappiamo che le soluzioni esistono per tutti i tempi.

Esercizio 2.5.1. Si mostri che se $x_1(t), x_2(t)$ sono due soluzioni di $\dot{x} = Ax$ allora anche $\lambda x_1(t) + \mu x_2(t)$ è una soluzione. Si usi tale risultato e l'unicità delle soluzioni delle equazioni differenziali per mostrare che, detta $x(t, x_0)$ la soluzione di (2.5.1), $x(t, x_0)$ è una funzione lineare di x_0 per ogni $t \in \mathbb{R}$. Se ne evinca che l'insieme di tutte le soluzioni dell'equazione $\dot{x} = Ax$ forma uno spazio vettoriale di dimensione d .

Dal problema precedente segue che, per ogni $x_0 \in \mathbb{R}^d$, possiamo scrivere la soluzione di (2.5.1) come $x(t, x_0) = \xi(t)x_0$ dove $\xi(t)$ è una matrice $d \times d$. Differenziando si ha che

$$\begin{aligned}\dot{\xi} &= A\xi \\ \xi(0) &= \mathbb{1}.\end{aligned}\tag{2.5.2}$$

Esercizio 2.5.2. Si definisca $\|A\| = \sup_{0 \neq x \in \mathbb{R}^d} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$. Si mostri che abbiamo definito una norma nello spazio vettoriale delle matrici $d \times d$. Si mostri che $\|A^n\| \leq \|A\|^n$. (suggerimento: per induzione).

Esercizio 2.5.3. Si verifichi che la funzione a valori nelle matrici $\xi(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} A^n t^n$ è una soluzione di (2.5.2). (suggerimento: si mostri che la serie converge totalmente, e quindi si derivi allegramente termine a termine)

Non dovrebbe quindi sorprendere che si usi la notazione $\xi(t) = e^{At}$. Rimane il problema di calcolare il valore della serie. Per semplicità limitiamoci al caso di matrici diagonalizzabili (ovvero assumiamo che A non abbia blocchi di Jordan). Questa assunzione è parzialmente giustificata dal seguente fatto.

Lemma 2.5.4. Arbitrariamente vicino ad ogni matrice A esiste una matrice senza blocchi di Jordan (in termini tecnici i blocchi di Jordan non sono generici).

Proof. Se la matrice A non ha blocchi di Jordan allora non c'è nulla da dimostrare. Se sì, allora esiste una matrice V tale che $B = V^{-1}AV^{-1}$ è in forma normale di Jordan. Si consideri quindi la matrice $B + \varepsilon C$ con $C_{i,j} = i\delta_{i,j}$ e ε arbitrariamente piccolo. Questa ha autovalori tutti distinti ed è simile ad una matrice arbitrariamente vicina ad A . $\square$

Dunque possiamo assumere che esiste V tale che $V^{-1}AV$ è diagonale. Si noti tuttavia che questo è possibile solo sul campo complesso.

Esercizio 2.5.5. Si mostri che tutto quanto detto sulle equazioni lineari vale anche se $x \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.

Esercizio 2.5.6. Si mostri che, posto $\Lambda = V^{-1}AV$, $e^{At} = Ve^{\Lambda t}V^{-1}$. (suggerimenti: 1) si usi nuovamente la convergenza uniforme della serie; oppure 2) si noti che $\zeta = V^{-1}e^{At}V$ soddisfa l'equazione $\dot{\zeta} = \Lambda\zeta$).

Esercizio 2.5.7. Si mostri che se $\Lambda_{i,j} = \lambda_j\delta_{i,j}$ allora $(e^{\Lambda t})_{i,j} = e^{\lambda_i t}\delta_{i,j}$.

Risulta quindi che l'evoluzione delle soluzioni di (2.5.1) dipendono solo dagli autovalori della matrice A . In particolare se $\sup_i \Re(\lambda_i) = \lambda_* < 0$, allora $\|e^{At}\| \leq \|V^{-1}\| \|V\| e^{-\lambda_* t}$. In tal caso il punto zero si dice *asintoticamente stabile* perchè tutte le soluzioni tendono asintoticamente a zero.

Esercizio 2.5.8. Si mostri che $(e^{At})^* = e^{A^*t}$.⁹ (suggerimento: si usi lo sviluppo in serie)

⁹Data una matrice, $d \times d$, B con B^* si intende la matrice aggiunta, cioè $(B^*)_{i,j} = \overline{B_{j,i}}$, dove dato $a \in \mathbb{C}$, $\bar{a}$ è il complesso coniugato di a .

Esercizio 2.5.9. *Si mostri che gli autovalori di A^* sono i complessi coniugati degli autovalori di A , con la stessa molteplicità. Inoltre se A ha blocchi di Jordan se e solo se A^* ne ha. (suggerimento: si mostri che A^* è coniugata a $\bar{A}$)*

Esercizio 2.5.10. *Dati $v, w \in \mathbb{C}^d$ si definisca il prodotto scalare $\langle v, w \rangle = \sum_{i=1}^d \bar{v}_i w_i$. Si mostri che $\langle v, Aw \rangle = \langle A^*v, w \rangle$.*

Se invece esiste λ_j tale che $\Re(\lambda_j) > 0$, allora zero è *instabile*, infatti se v_j è l'autovettore corrispondente all'autovalore $\bar{\lambda}_j$ di A^* e $\langle v_j, x_0 \rangle \neq 0$ allora

$$\langle v_j, e^{At}x_0 \rangle = \langle e^{A^*t}v_j, x_0 \rangle = \langle e^{\bar{\lambda}_j t}v_j, x_0 \rangle = e^{\lambda_j t} \langle v_j, x_0 \rangle.$$

Quindi $\lim_{t \rightarrow +\infty} |\langle v_j, e^{At}x_0 \rangle| = +\infty$. Rimane il caso in cui $\Re(\lambda_j) = 0$ per tutti gli autovalori. Poichè la matrice A in (2.5.1) è reale, ne segue che tutti gli autovalori di A sono a due a due complessi coniugati.

Esercizio 2.5.11. *Nel caso di cui sopra si mostri che esiste $C > 0$ tale che $\|e^{At}x_0\| \leq C\|x_0\|$ per ogni $t \in \mathbb{R}$. Ovvero il moto è stabile (Suggerimento: si usi nuovamente la matrice V che coniuga con una matrice diagonale)*

Nelle discussioni di cui sopra abbiamo usato i numeri complessi. È anche possibile evitarlo. Diamone un esempio.

Esercizio 2.5.12. *Dato $\theta \in \mathbb{R}$ si consideri la matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \theta \\ -\theta & 0 \end{pmatrix}.$$

Si mostri che

$$e^A = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}.$$

(Suggerimento: si usi lo sviluppo in serie) Inoltre si mostri che tale matrice applicata ad un vettore lo ruota di un angolo θ .

Il caso in cui A dipende da t è assai più complesso e non ammette soluzione generale a meno che non sia $d = 1$. L'unica cosa semplice che si può dire è che i risultati dell'esercizio 2.5.1 restano validi in questo caso più generale (lo si controlli). Esiste tuttavia un caso molto interessante: il caso in cui $A(t)$ sia periodico, ovvero esista $T > 0$ tale che $A(t + T) = A(t)$ per tutti i $t \in \mathbb{R}$. Spendiamo una parola al riguardo. Sia

$$\begin{aligned} \dot{\xi}(t) &= A(t)\xi(t) \\ \xi(0) &= \mathbb{1}, \end{aligned}$$

e si supponga che esista una matrice B tale che $\xi(T) = e^{BT}$.¹⁰ Definiamo allora $\eta(t) = e^{-Bt}\xi(t)$.

¹⁰Infatti si può dimostrare che tale matrice esiste, ma semplifichiamoci la vita assumendolo.

Esercizio 2.5.13. *Si mostri che η è periodica. (suggerimento: Si verifichi che se la condizione iniziale è D invece che $\mathbb{1}$ allora la soluzione è $\xi(t)D$. Se ne deduca che $\xi(nT) = \xi(T)^n$.)*

L'esercizio precedente costituisce un abbozzo della cosiddetta *Teoria di Floquet*.

Un altro caso interessante che può essere risolto esplicitamente è il caso lineare non omogeneo:

$$\begin{aligned}\dot{\xi}(t) &= A\xi(t) + f(t) \\ \xi(0) &= x_0\end{aligned}\tag{2.5.3}$$

dove A è una matrice $d \times d$ e $f \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^d)$. L'idea per risolvere questa equazione è di cercare soluzioni della forma $x(t) = e^{At}\eta(t)$ per qualche funzione η da determinare (questo metodo è a volte chiamato *variazione delle costanti* altre volte *formula di Duamel*, ma il nome poco importa, è la semplice idea di cui sopra). Differenziando x e sostituendo in (2.5.3) si ha

$$\begin{aligned}\dot{\eta}(t) &= e^{-At}f(t) \\ \eta(0) &= x_0\end{aligned}$$

Tale equazione si può integrare ottenendo

$$\eta(t) = x_0 + \int_0^t e^{-As}f(s)ds.$$

Ne segue che

$$x(t) = e^{At}x_0 + \int_0^t e^{A(t-s)}f(s)ds.$$

2.6 Un esempio interessante: l'equazione di Van der Pol

L'equazione di van der Pol è stata sviluppata come modello per certi circuiti elettrici che esibiscono comportamenti oscillatori. Ha varie forme equivalenti, noi considereremo la seguente

$$\ddot{x} - (1 - 3x^2)\dot{x} + x = 0.\tag{2.6.1}$$

La si può studiare qualitativamente nel modo precedentemente descritto: prima di tutto la si trasforma in un'equazione del primo ordine:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y \\ \dot{y} &= (1 - 3x^2)y - x.\end{aligned}\tag{2.6.2}$$

Ovviamente $(0, 0)$ è l'unico punto di equilibrio. Se linearizziamo l'equazione in zero otteniamo l'equazione lineare

$$\frac{d}{dt}(x, y) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

2.6. UN ESEMPIO INTERESSANTE: L'EQUAZIONE DI VAN DER POL²⁷

Poichè la matrice ha autovalori $\lambda_{\pm} = \frac{1 \pm \sqrt{3}i}{2}$ ne segue che il punto fisso è repulsivo e le soluzioni si allontanano spiraleggiando. Se questo non vi è chiaro scrivete la soluzione come $(x, y)(t) = e^{t/2}\eta(t)$ e sostituitemela nella equazione, si ha

$$\dot{\eta} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 1 \\ -1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \eta.$$

Si noti che

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 1 \\ -1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}^2 = -\frac{3}{4}\mathbb{1}.$$

Ragionando come nel Problema (2.5.12) si ha

$$(x(t), y(t)) = e^{t/2} \begin{pmatrix} \cos \frac{\sqrt{3}}{2}t & \sin \frac{\sqrt{3}}{2}t \\ -\sin \frac{\sqrt{3}}{2}t & \cos \frac{\sqrt{3}}{2}t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix},$$

da cui si vede esplicitamente che il vettore (x_0, y_0) viene ruotato e dilatato.

Questo comportamento è confermato dallo studio del segno di $\frac{dy}{dx}$ dove $\dot{x} \neq 0$. Rimane il problema di sapere come si comportano le soluzioni lontano dall'origine. A questo scopo consideriamo la funzione (di "Lyapunov")

$$L(x, y) = 2(x - x^3 - y)^2 + (x - y)^2 + 3x^2.$$

Se $(x(t), y(t))$ è una soluzione di (2.6.2), allora un calcolo diretto mostra che

$$\frac{d}{dt}L(x(t), y(t)) = x^2 [6 - x^2 - 3(x - y)^2 - 3y^2].$$

Dunque L è decrescente al di fuori di una ellisse. Inoltre si noti che $2xy \leq 2x^2 + \frac{1}{2}y^2$.¹¹ Quindi

$$L(x, y) \geq 3x^2 + y^2 - 2x^2 - \frac{1}{2}y^2 = x^2 + \frac{1}{2}y^2.$$

Dunque gli insiemi $K_{\alpha} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : L(x, y) \leq \alpha\}$ sono contenuti all'interno delle ellissi $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + \frac{1}{2}y^2 \leq \alpha\}$ e sono quindi compatti.

Ne segue che se la traiettoria è sufficientemente lontana da zero, allora tenderà ad avvicinarsi all'origine e quindi a spiraleggiare verso l'interno.

Esercizio 2.6.1. *Si dimostri che la soluzione spiraleggia anche lontano da zero studiando le equazioni differenziali per $y(x)$ e per $x(y)$. (Suggerimento: Per esempio, l'equazione per $y(x)$ è data da $\frac{dy}{dx} = 1 - 3x^2 - \frac{x}{y}$ ed è ben definita per $y \neq 0$. La si studi tenendo conto che $\frac{dx}{dy} = 0$ per $y = 0$, ovvero: le soluzioni attraversano l'asse delle x perpendicolarmente ad esso.)*

Per continuità deve esistere *almeno* una trattoria che torna esattamente al punto di partenza, dunque una traiettoria periodica. Se questa traiettoria periodica è unica (cosa che è vera ma non la dimostriamo) allora è attrattiva poichè

¹¹Questo segue da $(\sqrt{2}x - \frac{y}{\sqrt{2}})^2 \geq 0$.

al suo esterno si spiraleggia verso l'origine mentre la sua esterno si spiraleggia allontanandosi dall'origine. Dunque per tutte le condizioni iniziali non nulle la soluzione tenderà verso la soluzione periodica e quindi il sistema tende ad esibire un comportamento periodico, esattamente il comportamento che Van der Pol voleva spiegare introducendo la sua equazione.

Esercizio 2.6.2. *Si mostri che l'orbita periodica non può essere tutta esterna all'ellisse $6 - x^2 - 3(x - y)^2 - 3y^2 = 0$. (Suggerimento: si supponga che lo sia e si ricavi una contraddizione dal fatto che L deve decrescere strettamente).*

2.7 Equazioni della meccanica

Le equazioni che appaiono in meccanica sono del secondo ordine ed hanno spesso la forma speciale

$$M\ddot{x} = -A\dot{x} + F(x, t) \quad (2.7.1)$$

dove M e A sono una matrici simmetriche definite positive¹² e M definita strettamente positiva.¹³ Inoltre assumiamo $F \in \mathcal{C}^1$. La matrice A rappresenta (fenomenologicamente) l'attrito.

Dunque poichè quanto detto fin qui si riferisce ad equazioni del primo ordine, sembra essere irrilevante per le equazioni della meccanica. Tuttavia basta porre $v(t) = \dot{x}(t)$, $z(t) = (x(t), v(t))$, $V(z, t) = (v, F(x, t))$ e $z_0 = (x_0, v_0)$ per ricondursi al caso (10.2.1).

Esercizio 2.7.1. *Si mostri che se $A = 0$ allora si applica il Teorema di Liouville 2.4.4.*

Un caso molto comune in meccanica è quello in cui F non dipende da t ed esiste una funzione $U \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ tale che $F = -\nabla U$. La funzione U è chiamata il *potenziale* della forza (se veda la sezione 2.8 per ulteriori dettagli). Un'altra funzione fondamentale è $E(x, v) = \frac{1}{2}\langle v, Mv \rangle + U(x)$.¹⁴ La ragione della sua rilevanza dipende dal seguente conto: data una soluzione $x(t)$ di (2.7.1) si ha

$$\frac{d}{dt}E(x(t), \dot{x}(t)) = \langle \dot{x}, M\ddot{x} \rangle + \langle \nabla U, \dot{x} \rangle = -\langle \dot{x}, A\dot{x} \rangle. \quad (2.7.2)$$

Dunque, se $A = 0$ allora l'energia si conserva, mentre se $A \neq 0$ allora l'energia diminuisce lungo il moto. Questo significa che l'energia può essere usata come *funzione di Lyapunov*. Che significa?

Sia $\bar{x}$ un punto di equilibrio, ovvero un punto tale che $F(\bar{x}) = 0$. Allora $x(t) = \bar{x}$ è una soluzione del moto, un punto di equilibrio. Si noti che questo significa che $\bar{x}$ è un punto stazionario di U . Si supponga che sia un minimo locale e $D^2U > 0$.

¹²Ovvero, per ogni $v \in \mathbb{R}^d$, si ha $\langle v, Av \rangle \geq 0$.

¹³Ovvero se $\langle v, Mv \rangle = 0$ se e solo se $v = 0$.

¹⁴A chi si chieda: ma che cavolo è l'energia? Consiglio di leggersi lo splendido capitolo 4, relativo all'energia, nelle [Lezioni di Feynman](#).

Esercizio 2.7.2. *Si mostri che $(\bar{x}, 0)$ è un minimo locale per E .*

Dunque (2.7.2) implica che gli insiemi $\{(x, \dot{x}) : E(x, \dot{x}) \leq E(\bar{x}, 0) + c\}$, $c > 0$, sono insiemi invarianti per il moto.

Proposizione 2.7.3 (Lyapunov). *Si mostri che se $A = 0$ allora $(\bar{x}, 0)$ è un punto di equilibrio stabile. Si mostri che se $A \geq \gamma \mathbb{1}$, $\gamma > 0$, allora $(\bar{x}, 0)$ è un punto di equilibrio asintoticamente stabile.*

Proof. Se $A = 0$ allora sappiamo che $(\bar{x}, 0)$ è un punto di minimo di E , dunque gli insiemi $C_h = \{(x, v) : E(x, v) \leq h\}$ sono intorno di $(\bar{x}, 0)$ (contenuti in palle di diametro $C\sqrt{h}$) e sono insiemi invarianti per la dinamica (ovvero se $(x, v) \in C_h$ allora $(x(t), v(t)) \in C_h$ visto che $E(x, v) = E(x(t), v(t))$).

Consideriamo ora il caso $A > 0$. Visto che i potenziali sono definiti a meno di una costante non si perde nulla in generalità supponendo $U(\bar{x}) = 0$. Poichè E è decrescente lungo le traiettorie e limitata dal basso ne segue che esiste $\lim_{t \rightarrow \infty} E(x, \dot{x}) = \ell$. Se $\ell = 0$ allora abbiamo concluso, consideriamo quindi il caso $\ell > 0$. Mostriamo che questa possibilità porta ad una contraddizione e quindi non può accadere. Infatti in questo caso (2.7.2) implica facilmente che $\|\dot{x}\|^2$ è integrabile su $\mathbb{R}_{\geq 0}$, ma, con un poco di lavoro, si può dimostrare ancora di più.

Lemma 2.7.4. *Nelle ipotesi di cui sopra si ha*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \dot{x}(t) = 0.$$

Proof. Supponiamo che ciò non sia vero, allora esiste $\varepsilon > 0$ e una successione di tempi $\{t_j\}$ tali che $\|\dot{x}(t_j)\| \geq \varepsilon$. D'altro canto, poichè il moto avviene in un compatto, (2.7.1) implica che esiste $C > 0$ tale che $\|\ddot{x}(t)\| \leq C$. Questo implica che, per ogni t_j , esiste un intervallo di tempi $I = [a, b] \ni t_j$ di lunghezza $\frac{1}{2}C^{-1}\varepsilon$ tale che $\|\dot{x}(t)\| \geq \frac{\varepsilon}{2}$ per ogni $t \in I$. Ma allora l'ipotesi $A \geq \gamma \mathbb{1}$ e (2.7.2) implicano

$$E(b) - E(a) \leq -\gamma \int_a^b \|\dot{x}(s)\|^2 ds \leq -\gamma \frac{\varepsilon^3}{8C}.$$

Quindi vicino ad ogni tempo t_j l'energia cala di una quantità fissata. Poichè l'energia è positiva, può calare in questa maniera solo un numero finito di volte contraddicendo così l'ipotesi. $\square$

Usando ancora il fatto che $x(t)$ rimane per tutti i tempi in un compatto, si ha che esiste una sottosuccessione t_j tale che $x(t_j)$ è convergente, sia x_* il limite, dal Lemma 2.7.4 segue $U(x_*) = \ell$. Dunque $x_* \neq \bar{x}$ e $F(x_*) \neq 0$. Quindi $\ddot{x}(t_j)$ converge verso $F(x_*) \neq 0$. Siamo pronti a concludere: per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $t_\varepsilon > 0$ tale che $\|\dot{x}(t)\| \leq \varepsilon$ per ogni $t \geq t_\varepsilon$. Sia $t_j > t_\varepsilon$ sufficientemente grande tale che $\|F(x(t_j))\| \geq \frac{1}{2}\|F(x_*)\|$, allora, per $t \geq t_j$,

$$F(x(t)) = F(x(t_j)) + \mathcal{O}(|t - t_j|\varepsilon).$$

Dunque

$$\dot{x}(t) - \dot{x}(t_j) = \int_{t_j}^t \ddot{x}(s) ds = M^{-1} \int_{t_j}^t [F(x(s)) - Ax(s)] ds.$$

Ovvero esiste $c > 0$ tale che¹⁵

$$\|\dot{x}(t) - \dot{x}(t_j)\| \geq \frac{1}{2}(\|M^{-1}F(x_*)\| - c\varepsilon)(t - t_j) - c\varepsilon(t - t_j)^2,$$

che ovviamente, scegliendo ad esempio $t = t_j + 2\|M^{-1}F(x_*)\|^{-1}$ e ε piccolo, contraddice $\|\dot{x}(t) - \dot{x}(t_j)\| \leq 2\varepsilon$. $\square$

2.8 Potenziale

Come abbiamo accennato spesso in meccanica le forze derivano da potenziali, ovvero hanno la forma $F = -\nabla V$. È quindi naturale domandarsi se sia possibile distinguere una forza che deriva da un potenziale da uno che invece non ha potenziale.

Per semplicità considereremo solo il caso $V \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$. In tal caso il Lemma di Schwatz ci dice che $\partial_{x_i}\partial_{x_j}V = \partial_{x_j}\partial_{x_i}V$, dunque se $F = -\nabla V$ segue che $\partial_{x_i}F_j = \partial_{x_j}F_i$, ovvero la matrice DF è simmetrica. Dunque la simmetria di DF è una condizione necessaria, ma è anche sufficiente? La risposta è affermativa se il dominio della F è semplicemente connesso. Poiché non vogliamo sviluppare la teoria generale qui ci limitiamo al caso $F \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$.

Lemma 2.8.1. *Sia data una funzione $F \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$. Se DF è simmetrica, allora esiste una funzione $V \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ tale che $F = -\nabla V$. Inoltre, date due funzioni V_1, V_2 tali che $F = -\nabla V_i$ si ha che $V_1 - V_2 \equiv a$ per qualche costante $a \in \mathbb{R}$.*

Proof. Per ogni $x \in \mathbb{R}^d$ sia $\Gamma(x)$ l'insieme delle curve $\mathcal{C}^1([0, 1], \mathbb{R}^d)$ tali che $\gamma(0) = 0$ e $\gamma(1) = x$. Data $\gamma \in \Gamma(x)$ si definisca

$$a(\gamma) = \int_0^1 \langle F(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle dt.$$

Come primo passo vogliamo dimostrare che $a(\gamma)$ non dipende da γ .

Si considerino $\gamma_0, \gamma_1 \in \Gamma(x)$ allora per ogni $\lambda \in [0, 1]$ consideriamo

$$\gamma_\lambda(t) = \lambda\gamma_1(t) + (1 - \lambda)\gamma_0(t).$$

Esercizio 2.8.2. *Si mostri che $\gamma_\lambda \in \Gamma(x)$.*

¹⁵Si noti che, per definizione, $\inf_{\|v\|=1} \langle v, Mv \rangle > 0$ e siccome $\{\|v\| = 1\}$ è un compatto allora esiste $m > 0$ tale che $\inf_{\|v\|=1} \langle v, Mv \rangle \geq m$. Me segue che tutti gli autovalori di M sono maggiori di m . Infatti, sia λ un autovalore e v , $\|v\| = 1$, il corrispondente autovettore, allora $m \leq \langle v, Mv \rangle = \lambda$. Poiché M è simmetrica allora tutti autovettori $\{v_i\}$, corrispondenti agli autovalori λ_i , formano una base ortonormale. Dunque $\|M^{-1}v\|^2 = \|\sum_i \alpha_i Mv_i\|^2 = \|\sum_i \alpha_i \lambda_i^{-1} v_i\|^2 = \sum_i \alpha_i^2 \lambda_i^{-2} \geq m^{-2} \sum_i \alpha_i^2 = m^{-2} \|v\|^2$.

Allora possiamo scrivere

$$\begin{aligned}
 a(\gamma_1) - a(\gamma_0) &= \int_0^1 \frac{d}{d\lambda} a(\gamma_\lambda) d\lambda \\
 &= \int_0^1 d\lambda \int_0^1 dt \langle D_{\gamma_\lambda(t)} F[\gamma_1(t) - \gamma_0(t)], \gamma'_\lambda(t) \rangle + \int_0^1 d\lambda \int_0^1 dt \langle F(\gamma_\lambda(t)), \gamma'_1(t) - \gamma'_0(t) \rangle \\
 &= \int_0^1 d\lambda \int_0^1 dt \langle \gamma_1(t) - \gamma_0(t), D_{\gamma_\lambda(t)} F \gamma'_\lambda(t) \rangle + \int_0^1 d\lambda \int_0^1 dt \langle F(\gamma_\lambda(t)), \gamma'_1(t) - \gamma'_0(t) \rangle \\
 &= \int_0^1 d\lambda \int_0^1 dt \langle \gamma_1(t) - \gamma_0(t), \frac{d}{dt} F \circ \gamma_\lambda(t) \rangle + \int_0^1 d\lambda \int_0^1 dt \langle F(\gamma_\lambda(t)), \gamma'_1(t) - \gamma'_0(t) \rangle \\
 &= \int_0^1 d\lambda \int_0^1 dt \frac{d}{dt} \langle \gamma_1(t) - \gamma_0(t), F \circ \gamma_\lambda(t) \rangle \\
 &= \int_0^1 d\lambda [\langle \gamma_1(1) - \gamma_0(1), F \circ \gamma_\lambda(1) \rangle - \langle \gamma_1(0) - \gamma_0(0), F \circ \gamma_\lambda(0) \rangle] = 0.
 \end{aligned}$$

Di conseguenza possiamo definire la funzione

$$V(x) = -a(\gamma) = - \int_0^1 \langle F(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle dt$$

per una qualche $\gamma \in \Gamma(x)$.

Esercizio 2.8.3. *Si mostri che $F = -\nabla V$. (Suggerimento: si scelga γ furbamente.)*

Per concludere, se $F = -\nabla V_i$ allora $\nabla(V_1 - V_2) = 0$. Ma allora per ogni $x \in \mathbb{R}^d$ possiamo definire la funzione $f(\lambda) = V_1(\lambda x) - V_2(\lambda x)$.

Esercizio 2.8.4. *Si mostri che $\frac{d}{d\lambda} f(\lambda) = 0$.*

Sappiamo quindi da un teorema di Analisi 1 che f è costante e quindi $V_1(x) - V_2(x) = f(1) = f(0) = V_1(0) - V_2(0)$ da cui il Lemma segue per l'arbitrarietà di x . $\square$

2.9 Forze fondamentali

È naturale chiedersi, quali sono le forze fondamentali in natura? Questa è una domanda ancora aperta che non è questo il luogo per esplorare, per quanto riguarda il seguito considereremo solo forze gravitazionali e forze elettriche. Data due particelle con posizione $x, y \in \mathbb{R}^3$, rispettivamente, masse $m_x, m_y \in \mathbb{R}_+$ e cariche $e_x, e_y \in \mathbb{R}$ abbiamo che il potenziale gravitazionale è

$$U_g(x - y) = -G \frac{m_x m_y}{\|x - y\|}$$

dove G è detta *costante gravitazionale*. Mentre quello elettrico (detto Coulombiano) è

$$U_g(x - y) = \kappa \frac{e_x e_y}{\|x - y\|}$$

dove κ è detta costante di Coulomb.

Si noti che le due forze sono apparentemente molto simili, esistono tuttavia differenze fondamentali, qui ci limiteremo a menzionarne due. Prima di tutto le *cariche gravitazionali* (ovvero le masse) sono sempre positive, mentre le cariche elettriche possono essere sia positive che negative e dunque, se le cariche hanno segno opposto, la forza elettrica può essere anche repulsiva. Un'altra differenza importante è che $G \sim 7 \cdot 10^{-11} m^3 kg^{-1} s^{-2}$ mentre $\kappa \sim 9 \cdot 10^9 Nm^2 C^{-2}$.

Quindi, a parte il fatto che si tratta di costanti misurate in diverse unità, la costante di Coulomb è circa 20 ordini di grandezza più grande di quella gravitazionale, pazzescamente più forte! Vi potete chiedere: se la forza elettrica è così forte come mai non ne sentiamo gli effetti. La ragione è che le cariche positive e quelle negative sono quasi esattamente nello stesso numero e quindi la materia è quasi neutra. Ne parleremo nuovamente più avanti.

2.10 ODE on Manifolds—few words

Let us remind that a *topological manifold* is a second countable Hausdorff space which is locally homeomorphic to Euclidean space. A *chart* over a topological manifold M is a pair (U, ϕ) such that $U \subset M$ is an open set and $\phi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$, for some $n \in \mathbb{N}$, is a homeomorphism between U and the open set $\Phi(U)$. An *atlas* on a topological manifold is a countable collection of charts $\{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}$. We say that an atlas is $\mathcal{C}^k$ if $\phi_\alpha \circ \phi_\beta^{-1}$ is $\mathcal{C}^k$ when is defined. We say that two $\mathcal{C}^k$ atlas are equivalent if their union is a $\mathcal{C}^k$ atlas. A $\mathcal{C}^k$ manifold is a topological manifold equipped with an equivalence class of $\mathcal{C}^k$ atlas (often called a *differentiable structure*).

Although most often we will be concerned with manifolds embedded in some $\mathbb{R}^d$, also other possibilities will be relevant. Let us consider two examples.

Esercizio 2.10.1. Show that $\mathbb{R}^d$ is a $\mathcal{C}^\infty$ manifold.¹⁶

Esercizio 2.10.2. Let $f \in \mathcal{C}^k(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$, and consider $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R} : y = f(x)\}$. Consider the atlas consisting of the chart (M, ϕ) where $\phi(x, y) = x$. This is a $\mathcal{C}^\infty$ manifold.

Esercizio 2.10.3. Check that $\mathbb{T}^d = \mathbb{R}^d / \mathbb{Z}^d$ is a $\mathcal{C}^\infty$ manifold.

Given two differentiable manifolds ($\mathcal{C}^k$ manifolds with $k \geq 1$) M_1, M_2 and a map $f : M_1 \rightarrow M_2$ we say that $f \in \mathcal{C}^r(M_1, M_2)$, $r \leq k$, if for each atlas $\{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}$ of M_1 and atlas $\{(V_\beta, \psi_\beta)\}$ of M_2 , holds true $\psi_\beta \circ f \circ \phi_\alpha^{-1} \in \mathcal{C}^r$ on their domains of definition.

¹⁶Note that, contrary to $\mathcal{C}^k$, $\mathcal{C}^\infty$ is not a Banach space (there is no good norm). It is possible to give to it the structure of a Fréchet space, but we will refrain from such subtleties. We just consider $\mathcal{C}^\infty = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{C}^n$ as a vector space.

Given a differentiable manifold M and $x \in M$, we say that two curves $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathcal{C}^1((-1, 1), M)$, such that $\gamma_1(0) = \gamma_2(0) = x$, are equivalent at x if a chart (U, ϕ) such that $x \in U$ holds true $(\phi \circ \gamma_1)'(0) = (\phi \circ \gamma_2)'(0)$. A *tangent vector* at x is an equivalence class of curves.

Esercizio 2.10.4. *Note that the above equivalence classes may, in principle, depend on the chart. This is not the case: show that if $x \in U$ and $x \in V$ for two charts $(U, \phi), (V, \psi)$, then the above equivalence classes of curves are the same in both charts.*

Esercizio 2.10.5. *Show that if M is locally homeomorphic to $\mathbb{R}^d$, then the set of tangent vectors at any $x \in M$ form canonically a d dimensional vector space.¹⁷*

We will use $\mathcal{T}_x M$ to designate the *tangent space* at x , that is the set of the tangent vectors at x . The tangent bundle is the disjoint union of the tangent spaces, i.e. $\mathcal{T}M = \cup_{x \in M} \{x\} \times \mathcal{T}_x M$. Finally, a *vector field* is a section of the tangent bundle, i.e. $\tilde{V} : M \rightarrow \mathcal{T}M$ such that $\tilde{V}(x) = (x, V(x))$, $V(x) \in \mathcal{T}_x M$. From now on, with a slight abuse of notation, we will identify $\tilde{V}$ with V . Also, given $f \in \mathcal{C}^1(M_1, M_2)$, since the image of a $\mathcal{C}^1$ curve is a $\mathcal{C}^1$ curve, we have naturally defined a map $f_* : \mathcal{T}M_1 \rightarrow \mathcal{T}M_2$.

Esercizio 2.10.6. *If $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^n)$ discuss the relation between f_* and the derivative Df .*

We have finally the language to define O.D.E. on manifolds, in fact the Cauchy problem is exactly given again by (10.2.1), only now V is a, possibly time dependent, $\mathcal{C}^1$ vector field.

Esercizio 2.10.7. *Suppose that x_0 belongs to some chart (U, ϕ) , show that the solution of*

$$\begin{aligned}\dot{x} &= V(x, t) \\ x(0) &= x_0\end{aligned}$$

for a sufficiently small time can be obtained by the solution of an appropriate O.D.E. in $\phi(U)$.

Esercizio 2.10.8. *Given a finite atlas $\{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}$, show that there exists a smooth partition of unity subordinated to the atlas, that is a collection $\{\varphi_\alpha\} \in \mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R})$ such that $\sum_\alpha \varphi_\alpha = 1$ and $\text{supp } \varphi_\alpha \subset U_\alpha$.*

Esercizio 2.10.9. *Given a smooth vector field V consider*

$$\begin{aligned}\dot{x} &= V(x) \\ x(0) &= x_0\end{aligned}\tag{2.10.1}$$

¹⁷If (U, ϕ) is a chart containing x , and γ_1, γ_2 two curves, think of the curves $\gamma_\lambda(t) = \gamma_1(\lambda t)$ and $\phi^{-1}(\phi(\gamma_1(t)) + \phi(\gamma_2(t)) - \phi(x))$.

with $x_0 \in U_\alpha$ for some element of an atlas $\{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}$. Let $z_\alpha(t)$ be the solution of

$$\begin{aligned}\dot{z}_\alpha &= (\phi_\alpha)_* V(z_\alpha) \\ z_\alpha(0) &= \phi_\alpha(x_0)\end{aligned}$$

and suppose that $\phi_\alpha^{-1}(z(1)) \in U_\beta$. Consider then the solution of

$$\begin{aligned}\dot{z}_\beta &= (\phi_\beta)_* V(z_\beta) \\ z_\beta(1) &= \phi_\beta(\phi_\alpha^{-1}(z_\alpha(1))).\end{aligned}$$

Show that there exists $t_1 > 1$ such that

$$\begin{aligned}x(t) &= \phi_\alpha^{-1}(z_\alpha(t)) \quad \text{for } t \in [0, 1] \\ x(t) &= \phi_\beta^{-1}(z_\beta(t)) \quad \text{for } t \in (1, t_1)\end{aligned}$$

is a solution of (2.10.1) in the time interval $[0, t_1]$.

Remark 2.10.10. We have seen that the theory of ODE on manifolds can be reduced locally to the case of $\mathbb{R}^d$. Yet, the reader should be aware that the global properties of the solutions can be very different. We will comment at length on this issue later on.