Chapter 3

Moti unidimensionali

Cominciamo lo studio partendo dal caso più semplice possibile: i moti unidimensionali. Ne approfitteremo per discutere alcuni problemi la cui trattazione in dimensioni maggiori pone problemi il cui studio esula dai presenti scopi.

3.1 Moti lineari sotto l'influenza della gravità

Consideriamo due particelle di mass m, M, rispettivamente, che si muovono sotto l'influenza del potenziale gravitazionale $U(x-y) = -G\frac{mM}{|x-y|}$, dove x è la posizione della prima particella e y quella della seconda. Le eqauzioni del moto sono

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= -U'(x-y) \\ M\ddot{y} &= U'(x-y). \end{aligned}$$

Ne segue che il centro di massa $z = \frac{mx+My}{m+M}$ soddisfa $\ddot{z} = 0$, ovvero si muove di moto rettilineo uniforme. Sembra quinidi naturale introdurre $\xi = x - y$. Si noti che z, ξ determinano univocamente x, y e quindi possono essere usate come nuove coordinate. Come abbiamo detto il moto del centro di massa è rettilineo uniforme, d'altro canto

$$\ddot{\xi} = -(M^{-1} + m^{-1})U'(\xi).$$

Ovvero, ponendo $\mu = \frac{Mm}{M+m}$,

$$\mu\ddot{\xi} = -U'(\xi),$$

abbiamo dunque ridotto il problema di due particelle alla equazione per una particella. Supponiamo che $\xi_* := \xi(0) < 0$ e $\dot{\xi}(0) > 0$, allora ξ si muove verso zero dove il potenziale ha una singolarià. Questo è chiaramente problematico perchè non è chiaro cosa significhino le nostre equazioni in zero. Esistono vari modi di trattare questo problema il più semplice è di dire che non abbiamo nessuna ragione di credere che la legge gravitazionale sia corretta per distanze arbitrariamente piccole, infatti non lo è. Possiamo quindi pensare che sia valida fino ad una distanza ε e che per distanze minori sia determianta da una qualche teoria più sofisticata in cui il potenziale non diverge ma ha un significato fisico preciso. In mancaza di questa teoria più sofistica (che poi sarebbe la teoria della gravià generale) ci accontentialo di un modello super stupido, ovvero supponiamo che il potenziale sia

$$U_\varepsilon(\xi) = -G\frac{mM}{\sqrt{\xi^2+\varepsilon}}.$$

Chiaramente $\lim_{\varepsilon\to 0} U_\varepsilon(\xi)U(\xi)$ e $U_\varepsilon \in \mathcal{C}^\infty$ per cui genera una equazione differenziale che soddisfa tutte le ipotesi del capitolo precedente. Siccome non sappiamo quanto il potenziale gravitazionale vero differisce da quello Newtoniano, il nostro modellino è sensato solo se il moto ottenuto dipende molto poco da ε. Per sapere se questo è il caso dobbiamo studiare l'equazione

$$\mu\ddot{\xi} = -U_\varepsilon'(\xi). \tag{3.1.1}$$

Moltiplicando per $\dot{\xi}$ e integrando nel tempo otteniamo

$$\frac{\mu}{2}\dot{\xi}^2(t) + U_\varepsilon(x(t)) = \frac{\mu}{2}\dot{\xi}^2(0) + U_\varepsilon(x(0)) =: E$$

Che implica

$$\dot{\xi}(t) = \sqrt{\frac{2}{\mu}(E - U_\varepsilon(\xi(t)))}$$

dove abbiamo scelto il segno positivo percè al tempo zero la velocià è assunta positiva e quindi, per coninuità, lo sarà per tempi piccoli. Si noti che, per ogni $|\xi| \le |\xi_*|$,

$$E - U_\varepsilon(\xi) \ge E - U_\varepsilon(\xi_*) = \frac{\mu}{2}\dot{\xi}(0)^2 := \frac{\mu}{2}v_0^2 > 0. \tag{3.1.2}$$

On the other hand, if $E > 0$, then $E - U_\varepsilon(\xi) \ge -U_\varepsilon$, while if $E < 0$, then let $\beta \in (0,1)$ such that $E - U_\varepsilon(\xi_*) \ge -\beta U_\varepsilon(\xi_*)$, then, for each $\varepsilon \ge 0$,

$$E - U_\varepsilon(\xi) \ge -\beta U_\varepsilon(\xi). \tag{3.1.3}$$

Dunque in questo intervallo la radice è sempre positiva e possiamo scrivere

$$\begin{aligned}
t &= \int_0^t \frac{\dot{\xi}(s)}{\sqrt{\frac{2}{\mu}(E - U_\varepsilon(\xi(s)))}}ds = \int_{\xi_*}^{\xi(t)} \left[\frac{2}{\mu}(E - U_\varepsilon(x))\right]^{-\frac{1}{2}} dx \\
&= \int_{\xi_*}^{\xi(t)} \left[\frac{2}{\mu}(E - U_0(x))\right]^{-\frac{1}{2}} dx \\
&\quad + \int_{\xi_*}^{\xi(t)} \left\{\left[\frac{2}{\mu}(E - U_\varepsilon(x))\right]^{-\frac{1}{2}} - \left[\frac{2}{\mu}(E - U_0(x))\right]^{-\frac{1}{2}}\right\} dx.
\end{aligned}$$

Stimiamo ora il termine nell'ultima riga

$$\left| \int_{\xi_*}^{\xi(t)} \left\{ \left[\frac{2}{\mu}(E - U_\varepsilon(x)) \right]^{-\frac{1}{2}} - \left[\frac{2}{\mu}(E - U_0(x)) \right]^{-\frac{1}{2}} \right\} dx \right| \leq$$
$$\leq \int_{\xi_*}^{\xi(t)} \frac{\left| \left[\frac{2}{\mu}(E - U_0(x)) \right]^{\frac{1}{2}} - \left[\frac{2}{\mu}(E - U_\varepsilon(x)) \right]^{\frac{1}{2}} \right|}{\left[\frac{2}{\mu}(E - U_\varepsilon(x)) \right]^{\frac{1}{2}} \left[\frac{2}{\mu}(E - U_0(x)) \right]^{\frac{1}{2}}} dx.$$

Per continuare stimiamo il denominatore usando (3.1.3) e razionalizziamo ottenendo

$$\leq \int_{\xi_*}^{\xi(t)} \frac{\left| \frac{2}{\mu}(E - U_0(x)) - \frac{2}{\mu}(E - U_\varepsilon(x)) \right|}{v_0 \left[-\frac{2\beta}{\mu} U_0(x) \right]^{\frac{1}{2}} \left\{ \left[\frac{2}{\mu}(E - U_0(x)) \right]^{\frac{1}{2}} + [(E - U_\varepsilon(x))]^{\frac{1}{2}} \right\}} dx$$
$$\leq \int_{\xi_*}^{\xi(t)} \frac{U_0(x) - U_\varepsilon(x)}{v_0 \left[(E - U_0(x)) \right]^{\frac{1}{2}} \left[-\beta U_0(x) \right]^{\frac{1}{2}}} dx \leq \int_{\xi_*}^{\xi(t)} \frac{U_0(x) - U_\varepsilon(x)}{-v_0 \beta U_0(x)} dx$$
$$= \frac{1}{\beta v_0} \int_{\xi_*}^{\xi(t)} \frac{(x^2 + \varepsilon)^{\frac{1}{2}} - \sqrt{x^2}}{(x^2 + \varepsilon)^{\frac{1}{2}}} dx$$
$$\leq \frac{\sqrt{GmM}}{v_0^2 \sqrt{2\beta\mu}} \int_{\xi_*}^{\xi(t)} \frac{\varepsilon}{(x^2 + \varepsilon)^{\frac{1}{2}} [(x^2 + \varepsilon)^{\frac{1}{2}} + \sqrt{x^2}]} dx$$
$$\leq \varepsilon \frac{1}{\beta v_0} \int_{\xi_*}^{\xi(t)} \frac{1}{x^2 + \varepsilon} dx \leq \sqrt{\varepsilon} \frac{1}{\beta v_0} \int_{\varepsilon^{-\frac{1}{2}} \xi_*}^{\varepsilon^{-\frac{1}{2}} \xi_\varepsilon(t)} \frac{1}{y^2 + 1} dy$$
$$\leq C\sqrt{\varepsilon},$$

per qualche costante C.

Ne segue che, chiamando $\xi_\varepsilon(t)$ la soluzione di (3.1.1), per $\dot{\xi}_\varepsilon(t) \geq 0$ si ha

$$t + \mathcal{O}\left(\sqrt{\varepsilon}\right) = \frac{\mu}{2} \int_{\xi_*}^{\xi_\varepsilon(t)} \left[\frac{|x|}{E|x| + GMm} \right]^{\frac{1}{2}} dx.$$

Si noti che se ci limitiamo a vedere il moto in un intervallo limitato $[-L, L]$ allora, per $\varepsilon \geq \varepsilon' > 0$ piccolo a sufficienza e per una opportuna costante $C > 0$, abbiamo

$$C\sqrt{\varepsilon} \geq \frac{\mu}{2} \int_{\xi_\varepsilon(s)}^{\xi_{\varepsilon'}(t)} \left[\frac{|x|}{EL + GMm} \right]^{\frac{1}{2}} dx$$
$$\geq \frac{\mu}{3\sqrt{EL + GMm}} \left| |\xi_\varepsilon(t)|^{\frac{3}{2}} - |\xi_{\varepsilon'}(t)|^{\frac{3}{2}} \right|.$$

Questo mostra che ξ_ε è una successione di Chauchy e quindi ha limite. Detto ξ il limite si ha che

$$t = \frac{\mu}{2} \int_{\xi_*}^{\xi(t)} \left[\frac{|x|}{E|x| + GMm} \right]^{\frac{1}{2}} dx.$$

Questo implica che esiste il limite del moto per ε che tende a zero e che (nel modello di regolarizzazione che abbiamo fatto) le due particelle si attraversano senza problemi.

In altre parole abbiamo visto che la singolarità nel campo differenziale non impedisce di continuare le soluzioni per un tempo arbitrario a patto di supporre (questo pure è un modello del fenomeno) che le soluzioni fisiche sono quelle che si ottengono con il processo di regolarizzazione descritto.

3.2 Collisioni elastiche

Consideriamo due particelle di massa m che interagiscono con un potenziale $U_\lambda(x) = mU(\lambda x)$ dove $U \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}_+)$ è una funzione tale che $U(x) = 0$ per $|x| \geq 1$ e $U(x) = 1$ per $|x| \leq 1/2$ e $|U'(x)| > 0$ per ogni $|x| \in (1/2, 1)$.

Assumendo che le due particelle abbiano condizioni iniziali $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = 1$, $y(0) = 1$, $\dot{y}(0) = 0$, vogliamo capire come avviene il moto. Per $\lambda \gg 1$ questo sembra un modello ragionevole di un urto tra due particelle di massa uguale di cui una è ferma. Lo scopo di questa sezione è di studiare il limite per $\lambda \to \infty$ e vedere se questo ci suggerisce come trattare, in generale, l'urto tra particelle. Le equazioni del moto sono

$$
\begin{aligned}
m\ddot{x} &= -\partial_x U_\lambda(x-y) = -\lambda m U'(\lambda(x-y)) \\
m\ddot{y} &= -\partial_y U_\lambda(x-y) = \lambda m U'(\lambda(x-y)).
\end{aligned}
$$

Abbiamo quindi che il centro di massa $X = \frac{1}{2}(x+y)$ si muove come di moto rettilineo uniforme, quindi $X(t) = \frac{1}{2}(t+1)$. Mentre $\xi_\lambda = x - y$ soddisfa l'equazione

$$\ddot{\xi}_\lambda = -2\lambda U'(\lambda \xi_\lambda).$$

Poichè per $\xi_\lambda < -\lambda^{-1}$ la forza è nulla abbiamo che $\xi_\lambda(t) = -1 + t$ per tutti i $t \leq 1 - \lambda =: t_0$. Per $t = s + t_0$, $s \geq 0$ abbiamo

$$\frac{1}{2}\dot{\xi}_\lambda((t_0+s))^2 - \frac{1}{2} = -2U(\lambda \xi_\lambda(t+s)),$$

ovvero, fino a che $\dot{\xi}_\lambda \geq 0$,

$$\dot{\xi}_\lambda(t_0+s) = \sqrt{1 - 4U(\lambda\xi_\lambda(t+s))}.$$

Siano $\xi_+ \in [-1, 0]$ e $\xi_- \in [-1, \xi]$ tali che $U(\xi_+) = \frac{1}{4}$ e $U(\xi_+) = \frac{1}{8}$, allora

$$
\begin{aligned}
s &= \int_{t_0}^{t_0+s} \frac{\dot{\xi}_\lambda(t_0+s)}{\sqrt{1-4U(\lambda\xi_\lambda(t+s))}} ds = \int_{-\lambda^{-1}}^{\xi_\lambda(t_0+s)} \frac{1}{\sqrt{1-4U(\lambda y)}} dy \\
&= \lambda^{-1} \int_{-1}^{\lambda\xi_\lambda(t_0+s)} \frac{1}{\sqrt{1-4U(y)}} dy \leq \lambda^{-1} \int_{-1}^{\xi_+} \frac{1}{\sqrt{1-4U(y)}} dy \\
&= \lambda^{-1} \int_{-1}^{\xi_+} \frac{1}{2\sqrt{U(\xi_+) - U(y)}} dy \leq \lambda^{-1} \left[\sqrt{2} + \int_{\xi_-}^{\xi_+} \frac{1}{2\sqrt{U(\xi_+) - U(y)}} dy \right]
\end{aligned}
$$

Per concludere notiamo che per ipotesi $\alpha = \inf_{y\in[\xi_-,\xi_+]} U'(y) > 0$, quindi $U(\xi_+) - U(y) = \int_y^{\xi_+} U'(y)dy \geq (\xi_+ - y)\alpha$. Da cui segue

$$s \leq \lambda^{-1}\left[\sqrt{2} + \int_{\xi_-}^{\xi_+} \frac{1}{2\sqrt{\alpha(\xi_+ - y)}}dy\right] \leq \lambda^{-1}\left[\sqrt{2} + \frac{\sqrt{\xi_+ - \xi_-}}{\sqrt{\alpha}}\right]$$
$$\leq \lambda^{-1}\left[\sqrt{2} + \frac{1}{\sqrt{\alpha}}\right].$$

Questo implia che dopo un tempo $s_\lambda \leq \lambda^{-1}\left[\sqrt{2} + \frac{1}{\sqrt{\alpha}}\right]$ la particella inverte il moto e quindi dopo un tempo $2s_\lambda$ si ha $\xi_\lambda(t_0 + 2s_\lambda) = -\lambda$ e $\dot{\xi}_\lambda(t_0 + 2s_\lambda) = -1$. Quindi per i tempi successivi si ha $\xi_\lambda(t) = -\lambda - (t - t_0 - 2s_\lambda)$. Ne segue che

$$\lim_{\lambda\to 0} \xi_\lambda(t) = \begin{cases} -1 + t & \text{per } t \leq 1 \\ 1 - t & \text{per } t \geq 1. \end{cases}$$

Ovvero, nel limite abbiamo un moto uniforme fino a zero dove la velocità cambia instantaneamente di segno: un *collisione elastica* appunto.

Esercizio 3.2.1. *Si mostri che il moto limite è determinato completamente dalla conservazione del momento totale, della energia e dal fatto che le particelle non possono attraversarsi.*

Esercizio 3.2.2. *Due particelle puntiformi, rispettivamente di massa M e m, $M > m$, si muovono su di una retta orizzontale in assenza di forze con condizioni iniziali $X(0) = -1$, $\dot{X}(0) = 1$ e $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = 0$, rispettivamente. Se ne descriva il moto tenendo conto che la loro eventuale collisione è elastica (ovvero durante la collisione si conservano sia il momento totale che l'energia totale).*

3.3 Attrito Viscoso

3.3.1 Collisioni elastiche

Supponiamo che nei punti $k\varepsilon$, $k \in \mathbb{N}$, ci siano particelle di massa $\gamma\varepsilon$ a riposo. Tali particelle non interagiscono tra loro, ma possono collidere con una particella di massa m. Si supponga che quest'ultima particella abbia condizioni iniziali $x(0) = 1$ e $\dot{x}(0) = v > 0$. Il nostro obiettivo è quello di descrivere il moto $x_\varepsilon(t)$ di una particella di questo tipo nel limite di $\varepsilon \to 0$.

Si noti che il Problema 3.2.2 implica che se al tempo t si ha una collisione la velocità della particella passa da $\dot{x}_\varepsilon(t)$ a $\frac{m-\varepsilon\gamma}{m+\varepsilon\gamma}\dot{x}_\varepsilon(t)$, mentre la particella leggera dopo la collisione avrà velocità $\frac{2m}{m+\varepsilon\gamma}\dot{x}_\varepsilon(t)$ e quindi, muovendosi più velocemente della particella pesante, non colliderà più con essa. Questo implica che dopo n collisioni la velocità sarà

$$(1 - 2n\varepsilon\gamma m^{-1})\dot{x}_\varepsilon(t) \leq \left[\frac{1 - \varepsilon\gamma m^{-1}}{1 + \varepsilon\gamma m^{-1}}\right]^n \dot{x}_\varepsilon(t) \leq \dot{x}_\varepsilon(t).$$

Ne segue che in un tempo $h \gg \varepsilon$ il numero di collisioni che si hanno dopo il tempo t è inferiore a $\dot{x}_\varepsilon(t)\varepsilon^{-1}h$. Ne segue che

$$\dot{x}_\varepsilon(t+h) \geq (1 - 2m^{-1}\dot{x}_\varepsilon(t)h)\dot{x}_\varepsilon(t).$$

Quindi, tra t e $t+h$ avvengono almeno $(1 - 2m^{-1}\dot{x}_\varepsilon(t)h)\dot{x}_\varepsilon(t)\varepsilon^{-1}h$ collisioni. Per cui

$$\left[(1 - 2\gamma m^{-1}(1 - 2m^{-1}\dot{x}_\varepsilon(t)h)\dot{x}_\varepsilon(t)h\right]\dot{x}_\varepsilon(t) \geq \dot{x}_\varepsilon(t+h).$$

Ne segue che

$$-2m^{-1}\gamma\dot{x}_\varepsilon(t)^2 \leq \frac{\dot{x}_\varepsilon(t+h) - \dot{x}_\varepsilon(t)}{h} \leq -2\gamma m^{-1}(1 - 2m^{-1}\dot{x}_\varepsilon(t)h)\dot{x}_\varepsilon(t)^2.$$

Si noti che $\dot{\xi}(t)$ è una funzione costante a tratti: ogni volta che la particella pesante collide con una particella piccola si ha un salto nella velocità. Se t_j sono i tempi a cui avviene la collisione allora $t_{j+1} - t_j \sim \frac{\varepsilon}{\dot{x}_\varepsilon(t_j)}$, è quindi possibile definire la funzione $\xi_\varepsilon(t)$ tale che, per $t \in [t_j, t_{j+1}]$, $\xi_\varepsilon(t) = \dot{x}_\varepsilon(t_j)\frac{t_{j+1}-t}{t_{j+1}-t_j} + x_\varepsilon(t_{j+1})\frac{t-t_j}{t_{j+1}-t_j}$, dove $\dot{\xi}_\varepsilon(t_k)$ è il valore della velocià subito prima della collisione.

Si verifichi che

$$\|\xi_\varepsilon(t) - \dot{x}_\varepsilon(t)\|_\infty \leq C\varepsilon$$

per qualche costsnte $C > 0$.

Esercizio 3.3.1. *Si verifichi che*

$$\|\xi_\varepsilon(t) - \dot{x}_\varepsilon(t)\|_\infty \leq C\varepsilon$$
$$\left|\frac{\xi_\varepsilon(t+h) - \xi_\varepsilon(t)}{h}\right| \leq C.$$

per qualche costante $C > 0$.

Ne segue che, per Ascoli-Arzelà, existono sottocessini convergenti ξ_{ε_j}. Detto $\xi_*(t)$ il limite di una di queste sottosuccessioni si ha, per ogni $h > 0$ e $T > 0$ che, per ongi $t \leq T$,

$$-2m^{-1}\gamma\xi_*(t)^2 \leq \frac{\xi_*(t+h) - \xi_*(t)}{h} \leq -2\gamma m^{-1}(1 - 2m^{-1}\xi_*(t)h)\xi_*(t)^2$$
$$\xi_*(0) = v.$$

Prendento il limite $h \to 0$ si ha

$$\dot{\xi}_*(t) = -2m^{-1}\gamma\xi_*(t)^2$$
$$\xi_*(0) = v.$$

Poichè questa equazione ha un'unica soluzione, ne segue che tutti i punti di accomulazione sono uguali e quindi

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\dot{x}_\varepsilon = \xi_*.$$

Ovvero, tenendo conto che il caso in cui $v < 0$ è uguale ma con un segno cambiato, il moto limite soddisfa l'equazione

$$m\ddot{x} = -\gamma|\dot{x}|\dot{x}.$$