

Chapter 8

Vincoli

Nella vita di tutti i giorni siamo adusi a sistemi vincolati, ovvero sistemi i cui moti sono sottoposti a limitazioni. Per esempio un tram è limitato a muoversi sulle rotaie oppure i vari punti di un corpo solido sono limitati a muoversi tutti di concerto in modo da mantenere la forma del corpo. Se adottiamo il modello del moto dato dalle leggi di Newton, allora deve essere che queste limitazioni sono dovute a forze che agiscono sui corpi o sulle loro parti.

Vediamo di essere più precisi: si consideri un sistema con N particelle in $\mathbb{R}^3$ soggette ad $m < 3N$ vincoli specificati da un funzione $\Phi \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^{2N}, \mathbb{R}^m)$ attraverso la condizione

$$\Phi(x) = 0. \quad (8.0.1)$$

Se il vincolo di cui sopra fosse esattamente rispettato allora le equazioni del moto sarebbero $3N$ equazioni del tipo

$$M\ddot{x} = F + R \quad (8.0.2)$$

dove M è una matrice definita positiva rappresentate le masse, F sono le forze esterne applicate ai punti mentre R sono le reazioni vincolari che fanno sì che i moti soddisfino i vincoli (D.4.2). Ovviamente le forze R sono incognite dunque abbiamo $6N$ funzioni incognite e $3N + m < 6N$ equazioni. Dunque il problema non è ben determinato e quindi occorre introdurre qualche altra condizione per determinare la soluzione in maniera univoca. Non è tuttavia chiaro quale altra condizione imporre che possa avere una validità abbastanza generale ed indipendente dalle proprietà peculiari del sistema considerato. Allo scopo di farci una idea di cosa sia ragionevole risolveremo esplicitamente un semplice caso concreto: un pendolo.

8.0.1 Un pendolo (non del tutto) ideale

Consideriamo un punto materiale di massa m soggetto alla forza di gravità ed ad una forza interna determinata dal potenziale $V_\varepsilon(x) = \frac{1}{2}\varepsilon^{-2}(\ell - \|x\|)^2$, ovvero una molla di costante ε^{-2} e lunghezza a riposo ℓ . Tale molla rappresenta un modello

dell'asta a cui è attaccato il punto materiale: una asta di peso trascurabile, di lunghezza circa ℓ e di grande rigidità (e quindi poco deformabile). Infatti per deformare la lunghezza della barra occorre una energia di ordine ε^{-2} .¹ Per semplicità assumeremo $x \in \mathbb{R}^2$, un piano verticale. Le equazioni del moto sono dunque

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= -mg(0, 1) + \frac{1}{\varepsilon^2\|x\|}(\ell - \|x\|)x \\ x(0) &= \bar{x}; \dot{x}(0) = v. \end{aligned} \quad (8.0.3)$$

Sia x_ε l'unica soluzione di (8.0.3),² la domanda naturale è di chiedersi se esiste un limite per $\varepsilon \rightarrow 0$. Se così fosse, allora il moto limite potrebbe suggerire un naturale candidato per un punto materiale che si muove sotto l'influenza della forza di gravità e sottoposto al vincolo $\Phi(x) := \ell - \|x\| = 0$ e dal suo studio potremmo desumere eventuali condizioni ragionevoli a cui devono soddisfare le reazioni vincolari R . Procediamo quindi allo studio di (8.0.3).

Per cominciare si ricordi che l'energia

$$E = \frac{1}{2}m\langle \dot{x}, \dot{x} \rangle + mgx_2 + \frac{1}{2}\varepsilon^{-1}(\ell - \|x\|)^2 = \frac{1}{2}m\langle v, v \rangle + mg\bar{x}_2 + \frac{1}{2}\varepsilon^{-2}(\ell - \|\bar{x}\|)^2$$

è una quantità conservata. È quindi naturale richiedere che l'energia iniziale sia indipendente da ε , questo significa che deve esistere ξ_0 tale che

$$|\ell - \|\bar{x}\|| = \varepsilon \xi_0.$$

Consideriamo dunque condizioni iniziali in cui v non dipende da ε mentre $\bar{x} = (\ell + \varepsilon\xi_0)(\cos\theta_0, \sin\theta_0)$, con θ_0 indipendente da ε .

Dunque $E = \frac{1}{2}m\langle v, v \rangle + mg(\ell + \varepsilon\xi_0)\sin\theta_0 + \frac{1}{2}\varepsilon\xi_0^2$.

A questo punto risulta conveniente riscrivere tutte le quantità di interesse in coordinate polari, ovvero porre $x = \rho v(\theta)$ dove $v(\theta) = (\cos\theta, \sin\theta)$. Un conto diretto mostra che

$$\begin{aligned} m\ddot{\rho} - m\rho\dot{\theta}^2 &= -mg\sin\theta + \varepsilon^{-2}(\ell - \rho) \\ 2m\dot{\rho}\dot{\theta} + m\rho\ddot{\theta} &= -mg\cos\theta. \end{aligned}$$

Ripensando all'analisi precedente sembra poi naturale porre $\rho = \ell + \varepsilon\xi$. In queste nuove variabili si ha

$$\begin{aligned} m\varepsilon\ddot{\xi} - m(\ell + \varepsilon\xi)\dot{\theta}^2 &= -mg\sin\theta - \varepsilon^{-1}\xi \\ 2m\varepsilon\dot{\xi}\dot{\theta} + m(\ell + \varepsilon\xi)\ddot{\theta} &= -mg\cos\theta, \end{aligned} \quad (8.0.4)$$

inoltre $E = \frac{m}{2}(\varepsilon^2\dot{\xi}^2 + (\ell + \varepsilon\xi)^2\dot{\theta}^2) + mg(\ell + \varepsilon\xi)\sin\theta + \frac{1}{2}\varepsilon\xi^2$. Questo implica immediatamente che $\xi, \dot{\theta}$ e $\varepsilon\dot{\xi}$ sono uniformemente limitate in t e ε . Da questo e dalla

¹In realtà l'asta stessa è composta da moltissimi punti materiali uniti da forze che possiamo modellizzare con molle. Il nostro modello rappresenta quindi l'effetto cumulativo di tutte queste forze interne.

²Nel seguito spesso sopprimeremo la sottoscritta ε , quando questo non crea confusione, per alleggerire la notazione.

seconda delle (8.0.4) segue che anche $\ddot{\theta}$ è uniformemente limitata. Possiamo quindi usare Ascoli-Arzelà per trovare sottosuccessioni $\{\varepsilon_j\}$ tali che $\theta_{\varepsilon_j}, \dot{\theta}_{\varepsilon_j}$ convergono uniformemente a funzioni $\theta_*, \dot{\theta}_*$. A questo punto conviene moltiplicare la seconda delle (8.0.4) per $(\ell + \varepsilon\xi)$ e riscriverla come

$$\frac{d}{dt} [(\ell + \varepsilon\xi)^2 \dot{\theta}] = -g(\ell + \varepsilon\xi) \cos \theta.$$

Si noti che non sappiamo se $\ddot{\theta}_{\varepsilon_j}$ converge, sarebbe quindi meglio avere una equazione in cui questa quantità non compare. A questo scopo basta integrare l'equazione di cui sopra per ottenere

$$(\ell + \varepsilon\xi_{\varepsilon_j}(t))^2 \dot{\theta}_{\varepsilon_j}(t) = (\ell + \varepsilon\xi_{\varepsilon_j}(0))^2 \dot{\theta}_{\varepsilon_j}(0) - \int_0^t g(\ell + \varepsilon\xi_{\varepsilon_j}(s)) \cos \theta_{\varepsilon_j}(s) ds.$$

Possiamo ora prendere il limite per $j \rightarrow \infty$ e otteniamo

$$\ell^2 \dot{\theta}_*(t) = \ell^2 \dot{\theta}_*(0) - \int_0^t g\ell \cos \theta_*(s) ds,$$

questa equazione mostra che θ_* è una funzione liscia e si può quindi differenziare ottenendo

$$\ell^2 \ddot{\theta}_*(t) = -g\ell \cos \theta_*(t). \quad (8.0.5)$$

Poichè, date le condizioni iniziali tale equazione ha una unica soluzione, questo implica che esiste il limite di θ_ε e $\dot{\theta}_\varepsilon$, uniformemente, quando $\varepsilon \rightarrow 0$. Dunque θ_* è unicamente determinato e dunque il moto θ_ε converge uniformemente (assieme alla sua derivata) a quello di un pendolo ideale descritto dalla (8.0.5).

Il trucco che abbiamo usato per eliminare $\dot{\xi}$ (conservazione del momento angolare) è un molto carino, e anche profondo, ma ha lo svantaggio che non ci dice un gran che sul moto di ξ , mentre una maggiore comprensione di tale moto era appunto la motivazione del nostro modello. Per ottenere una migliore comprensione di ξ occorre tuttavia risolvere tutto il sistema di equazioni differenziali, questo richiede ulteriore lavoro.

Per semplificare la notazione, cominciamo con l'introdurre le funzioni $\bar{\varphi}(t) = (0, \varphi(t))$ e $\varphi(t) = (\ell + \varepsilon\xi)\dot{\theta}^2 - g \sin \theta$. Ovviamente φ è una funzione incognita, visto che dipende dalle soluzioni dell'equazione differenziale, tuttavia nulla ci impedisce di pensarla come una funzione data di t e risolvere il sistema lineare non omogeneo in tal modo ottenuto col metodo della variazione delle costanti (anzi, useremo una tecnica leggermente più generale che, se volete fare più scena, potete chiamare *principio di Duhamel*). Ovviamente la "soluzione" sarà implicita e costituirà semplicemente un'altra equazione per le variabili ξ, θ , tuttavia tale equazione sarà molto più semplice da analizzare. Per procedere con questa strategia, notiamo che la prima delle (8.0.4) si può riscrivere in modo più utile, introducendo le funzioni $z = (\xi, \eta) = (\xi, \dot{\xi})$, come

$$\dot{z} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{\varepsilon^2 m} & 0 \end{pmatrix} z + \varepsilon^{-1} \bar{\varphi} =: Az + \varepsilon^{-1} \bar{\varphi}.$$

Cercando una soluzione del tipo $z = e^{At}\zeta$ si ha

$$z(t) = e^{At}z(0) + \varepsilon^{-1} \int_0^t e^{A(t-s)} \bar{\varphi}(s) ds.$$

Poichè $A^2 = -\frac{1}{\varepsilon^2 m} \mathbb{1}$, usando la definizione per serie dell'esponenziale, segue che

$$e^{At} = \mathbb{1} \cos\left(\frac{t}{\sqrt{m\varepsilon}}\right) + A\sqrt{m\varepsilon} \sin\left(\frac{t}{\sqrt{m\varepsilon}}\right).$$

Possiamo quindi riscrivere l'equazione cercata come:

$$\xi(t) = \xi_0 \cos\left(\frac{t}{\sqrt{m\varepsilon}}\right) + \dot{\xi}(0)\varepsilon\sqrt{m} \sin\left(\frac{t}{\sqrt{m\varepsilon}}\right) + \sqrt{m} \int_0^t \varphi(s) \sin\left(\frac{t-s}{\sqrt{m\varepsilon}}\right) ds. \quad (8.0.6)$$

Quindi per capire come è fatta ξ occorre studiare l'ultimo integrale:

$$\begin{aligned} \int_0^t \varphi(s) \sin\left(\frac{t-s}{\sqrt{m\varepsilon}}\right) ds &= \sqrt{m\varepsilon} \int_0^t \varphi(s) \frac{d}{ds} \cos\left(\frac{t-s}{\sqrt{m\varepsilon}}\right) ds \\ &= \sqrt{m\varepsilon} \left[\varphi(t) - \varphi(0) \cos\left(\frac{t}{\sqrt{m\varepsilon}}\right) \right] - \sqrt{m\varepsilon} \int_0^t \varphi'(s) \cos\left(\frac{t-s}{\sqrt{m\varepsilon}}\right) ds \\ &= \mathcal{O}(\varepsilon\|\varphi\|_\infty + \varepsilon t\|\varphi'\|_\infty). \end{aligned} \quad (8.0.7)$$

Poichè dalle considerazioni precedenti sappiamo che φ e φ' sono uniformemente limitate, abbiamo ottenuto

$$\xi(t) = \xi_0 \cos\left(\frac{t}{\sqrt{m\varepsilon}}\right) + \dot{\rho}(0)\sqrt{m} \sin\left(\frac{t}{\sqrt{m\varepsilon}}\right) + \mathcal{O}(\varepsilon t). \quad (8.0.8)$$

8.0.2 Conclusioni

Che cosa abbiamo dunque imparato dalla sezione precedente?

Prima di tutto il nostro modello di vincolo ha fatto quello che ci aspettavamo: nel limite il moto avviene come se la molla fosse inchiodata alla lunghezza ℓ e le equazioni del moto fossero quelle di un pendolo ideale di lunghezza ℓ . Abbiamo scoperto la presenza di rapide vibrazioni che tuttavia non influenzano sostanzialmente il moto di θ e $\dot{\theta}$. In particolare, l'equazione (8.0.5) ha associata la sua energia, ovvero la quantità $\frac{\ell}{2}\dot{\theta}^2 + mg \sin \theta$ che è conservata. Questo significa che le vibrazioni (dovute alle forze interne del vincolo) non trasmettono energia al moto della variabile vincolata θ (almeno, non in tempi che non crescano essi stessi con ε^{-1}), ovvero *non fanno lavoro*.

In conclusione, abbiamo ottenuto il seguente suggerimento per una condizione da imporre alle reazioni vincolari R in (8.0.2): se v , $\|v\| = 1$, è la velocità di un moto permesso dal vincolo nel punto x , ovvero $D\Phi(x)v = 0$, allora deve essere

$$\langle R, v \rangle = 0 \quad (8.0.9)$$

ovvero, appunto, *il lavoro fatto dalle reazioni vincolari è nullo*.³ La condizione (8.0.9) viene comunemente chiamata *principio dei lavori virtuali*.

Poichè (se $D\Phi$ ha rango massimo) i moti possibili indipendenti sono $3N - m$ abbiamo le seguenti equazioni

$3N$ equazioni differenziali (le equazioni di Newton)

m equazioni algebriche per le posizioni (i vincoli)

$3N - m$ equazioni algebriche per le posizioni (il principio dei lavori virtuali)

$= 6N$ equazioni

per, appunto, $6N$ funzioni incognite. Sembra quindi che ora sia possibile cercare di risolvere le equazioni del moto in maniera univoca.

È quindi ragionevole assumere che un *vincolo ideale* possa essere modellizzato da reazioni vincolari che soddisfano il principio dei lavori virtuali.

8.0.3 Pendolo ideale

Tutti sappiamo che il pendolo è stato usato per secoli come orologio. Infatti è stato il primo strumento di una qualche precisione per la misurazione del tempo. Tuttavia un pendolo reale a) non è isocrono; b) è sottoposto all'attrito. Questo fa sì che gli orologi a pendolo siano assai più complessi di un pendolo semplice. Tuttavia, per mostrare quale sia il problema tecnologico da affrontare chiediamoci: se costruiamo un pendolo lungo un metro con attaccato il peso di 10 chili e lo mettiamo in oscillazione con una oscillazione massima di 10 cm e lo usiamo fino a che l'oscillazione non si riduce ad 1 cm, quanto è buono come orologio? Questo è come chiedere, quanto varia il periodo di oscillazione per le corrispondenti energie?

Esercizio 8.0.1. *Si calcoli l'energia del pendolo in coordinate polari e si mostri che può essere ridotta al caso di una energia unidimensionale della forma discussa nella sezione precedente con potenziale $V = \frac{gm}{l}(1 - \cos \theta)$.*

Sia θ_0 l'ampiezza del moto.

Esercizio 8.0.2. *Si mostri che, per un pendolo di massa m e lunghezza l si ha*

$$T(\theta_0) = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \left(1 + \frac{1}{16} \theta_0^2 + \mathcal{O}(\theta_0^4) \right).$$

(suggerimento: si calcolino gli integrali dell'Esercizio 4.1.7.)

Dunque, quando $l = 1$ m, notando che una oscillazione di 10 cm corrisponde circa a $\theta_0 = \frac{1}{10}$ abbiamo un cambiamento percentuale

$$\frac{T(\theta_0) - T(0)}{T(0)} \sim \frac{1}{1600}.$$

³Il lavoro è dato dallo spostamento per la forza, quindi a rigore la (8.0.9) da la sua derivata, ovvero la *potenza*. Comunque se la potenza è nulla, nullo sarà anche il suo integrale, il lavoro, appunto.

Supponiamo che questo pendolo “casalingo” impieghi 10 minuti a ridurre le oscillazione dal valore iniziale di 10 cm ad 1 cm, cosa abbastanza ragionevole con un peso di 10 kg. Ne segue che su tale intervallo di tempo il nostro pendolo farebbe un errore di circa mezzo secondo. Per tempi più lunghi si potrebbero usare due pendoli e farne partire uno quando l'altro è quasi fermo. In tal modo, immaginando di risolvere il problema della sincronizzazione in modo efficiente, si potrebbero misurare tempi arbitrariamente lunghi. A prima vista non sembra male, tuttavia nell'arco di 24 ore corrisponderebbe ad un errore di un minuto. Questo fa un poco pena come orologio, senza menzionare che non si può certo andare in giro con due pendoli di un metro del peso di venti chili che devono essere messi in oscillazione ogni 10 minuti.

Abbiamo comunque scoperto un fatto molto interessante: *è possibile produrre in natura fenomeni periodici con periodo abbastanza stabile da potere essere usati per misurare il tempo.* Tuttavia è chiaro che il pendolo semplice non è un oggetto soddisfacente, occorre quindi modificarlo in maniera opportuna al fine di migliorarne le prestazioni.

8.0.4 Quanto è buono il nostro modello?

Se uno vuole continuare l'analisi del nostro pendolo viene naturale il seguente esercizio.

Esercizio 8.0.3. *Si cerchi di raffinare l'analisi della sezione 8.0.1 in modo da capire cosa succede con più precisione e per tempi più lunghi.*

Per risolvere tale esercizio occorre una migliore comprensione dell'integrale nella seconda riga dell'equazione (8.0.7). Usando la seconda delle equazioni (8.0.4) si ha

$$\begin{aligned} \int_0^t \varphi'(s) \cos\left(\frac{t-s}{\sqrt{m\varepsilon}}\right) ds &= \int_0^t \left[2(\ell + \varepsilon\xi)\dot{\theta}\ddot{\theta} + \varepsilon\dot{\xi}\dot{\theta}^2 - \dot{\theta}g \cos\theta\right](s) \cos\left(\frac{t-s}{\sqrt{m\varepsilon}}\right) ds \\ &= -3 \int_0^t \left[\varepsilon\dot{\xi}\dot{\theta}^2 + \dot{\theta}g \cos\theta\right](s) \cos\left(\frac{t-s}{\sqrt{m\varepsilon}}\right) ds. \end{aligned} \quad (8.0.10)$$

Si noti che il termine $\dot{\theta}g \cos\theta$ è limitato assieme alla sua derivata e può quindi essere stimato con lo stesso metodo usato nella equazione (8.0.7). D'altro canto, differenziando (8.0.6) e argomentando come in (8.0.7), si ottiene

$$\begin{aligned} \varepsilon\dot{\xi}(t) &= -\frac{\xi_0}{\sqrt{m}} \sin\left(\frac{t}{\sqrt{m\varepsilon}}\right) + \dot{\rho}(0) \cos\left(\frac{t}{\sqrt{m\varepsilon}}\right) + \int_0^t \varphi(s) \cos\left(\frac{t-s}{\sqrt{m\varepsilon}}\right) ds \\ &= -\frac{\xi_0}{\sqrt{m}} \sin\left(\frac{t}{\sqrt{m\varepsilon}}\right) + \dot{\rho}(0) \cos\left(\frac{t}{\sqrt{m\varepsilon}}\right) + \mathcal{O}(\varepsilon t). \end{aligned} \quad (8.0.11)$$

Sostituendo la relazione qui sopra in (8.0.10) si ottiene, per $t \geq 1$,

$$\begin{aligned} \int_0^t \varphi'(s) \cos\left(\frac{t-s}{\sqrt{m\varepsilon}}\right) ds &= -3 \int_0^t \frac{\xi_0}{\sqrt{m}} \sin\left(\frac{s}{\sqrt{m\varepsilon}}\right) \dot{\theta}(s)^2 \cos\left(\frac{t-s}{\sqrt{m\varepsilon}}\right) ds \\ &\quad + 3 \int_0^t \dot{\rho}(0) \cos\left(\frac{s}{\sqrt{m\varepsilon}}\right) \dot{\theta}(s)^2 \cos\left(\frac{t-s}{\sqrt{m\varepsilon}}\right) ds + \mathcal{O}(\varepsilon t^2) \\ &= \mathcal{O}(\varepsilon t^2). \end{aligned}$$

Dove, nell'ultima eguaglianza abbiamo argomento nuovamente come nella equazione (8.0.7).⁴

Ne segue che

$$\xi(t) = \xi_0 \cos\left(\frac{t}{\sqrt{m\varepsilon}}\right) + \dot{\xi}(0)\varepsilon\sqrt{m} \sin\left(\frac{t}{\sqrt{m\varepsilon}}\right) + \sqrt{m\varepsilon} \left[\varphi(t) - \varphi(0) \cos\left(\frac{t}{\sqrt{m\varepsilon}}\right) \right] + \mathcal{O}(\varepsilon^2 t^2).$$

Si ricordi che $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varphi = \ell \dot{\theta}_*^2 - g \sin \theta_*$ dove θ_* è la soluzione di (8.0.5). Abbiamo dunque calcolato esplicitamente la correzione di ordine ε e abbiamo scoperto che non cresce col tempo ma è uniformemente limitata (infatti compie un moto quasi-periodico con due frequenze: quella delle oscillazioni del vincolo all'ordine zero e quella del pendolo).

Sorge dunque il sospetto che ξ ceda pochissima energia, al moto descritto dalla variabile θ , per tempi molto più lunghi di quelli che abbiamo stimato. Questo risulta essere vero ma per dimostrarlo occorre sviluppare un apparato teorico che esula dagli scopi del presente corso. Ad ogni modo il lettore se ne può convincere continuando nello sforzo di raffinare le stime fin qui fatte nel tentativo di risolvere in maniera più compiuta l'esercizio 8.0.3.

⁴In effetti, questa volta è un poco più complicato calcolare la primitiva, tuttavia lo si può fare facilmente ricordando le *formule di prostaferesi* (e voi che pensavate fossero inutili!).