

Fisica Matematica I

Secondo Appello, Sessione Estiva, 12-06-22

Cognome..... Nome.....

Avete 3:00 ore di tempo. Ogni esercizio vale 10 punti. Solo le **risposte chiaramente giustificate** saranno prese in considerazione. Le parti degli elaborati scritte in maniera **disordinata** o **incomprensibile** saranno **ignorate**.

1. Si consideri il moto unidimensionale $x(t)$ di una particella di massa 1 sotto l'azione del potenziale $V(x) = x^{2m}$, $m \in \mathbb{N}$. Si mostri che

$$\lim_{T \rightarrow \infty} T^{-1} \int_0^T \dot{x}(t)^2 dt = 2m \lim_{T \rightarrow \infty} T^{-1} \int_0^T V(x(t)) dt.$$

2. Sia dato, in un piano orizzontale, un disco omogeneo di raggio R , massa M e centro nell'origine e sia Q un punto sul disco a distanza $R/2$ dal centro. Inoltre sia P un punto materiale di massa m vincolato a muoversi sulla retta delle ascisse e tale che $\|P - Q\| = 2R$. Inoltre il punto P è connesso col punto $(0, 2R)$ da una molla di costante elastica K e lunghezza a riposo nulla. Si studino i punti di equilibrio di tale sistema e se ne discuta la stabilità.

3. Per ogni $M > 0$ e si consideri la Lagrangiana $\mathcal{L}_M \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^4, \mathbb{R})$

$$\mathcal{L}_M(x, \dot{x}, X, \dot{X}) = \frac{1}{2} \|\dot{x}\|^2 + \frac{M}{2} \|\dot{X}\|^2 - \frac{1}{2} \|x - X\|^2.$$

Detta E l'energia totale del sistema si consideri in moto (x_M, X_M) con condizioni iniziali $x = x_*$, $X = 0$ $E = \frac{M}{2} + \frac{1}{2} \|x_*\|^2$ e $\dot{x} = 0$. Si descriva il moto di x_M nel limite $M \rightarrow \infty$.

Soluzione

1. Si noti che il moto è periodico e quindi i limiti esistono. Allora

$$\begin{aligned}\int_0^T \dot{x}(t)^2 dt &= x(T)\dot{x}(T) - x(0)\dot{x}(0) - \int_0^T x(t)\ddot{x}(t) dt \\ &= x(T)\dot{x}(T) - x(0)\dot{x}(0) + \int_0^T x(t)V'(x(t)) dt \\ &= x(T)\dot{x}(T) - x(0)\dot{x}(0) + 2m \int_0^T x(t)^{2m} dt \\ &= x(T)\dot{x}(T) - x(0)\dot{x}(0) + 2m \int_0^T V(x(t)) dt.\end{aligned}$$

Poichè $x(t)\dot{x}(t)$ è una quantità limitata, il risultato segue banalmente.¹

2. Sia θ l'angolo che descrive la rotazione del disco. Poichè Q è solidale col disco possiamo assumere $Q = \frac{R}{2}v(\theta)$, $v(\theta) = (\cos \theta, \sin \theta)$ e $P = (x, 0)$ allora

$$4R^2 = \|P - Q\|^2 = x^2 - Rx \cos \theta + \frac{R^2}{4}.$$

Ovvero

$$x = \frac{R}{2} \left[\cos \theta \pm \sqrt{\cos^2 \theta + 15} \right] =: x_{\pm}(\theta).$$

Si ponga $w_{\pm}(\theta) = -\frac{R}{2} \left[\sin \theta \pm \cos \theta \sin \theta [\cos^2 \theta + 15]^{-\frac{1}{2}} \right] = \frac{d}{d\theta} x_{\pm}(\theta)$. Si noti che $x_{\pm}$ non può mai essere zero e quindi o è sempre positivo e sempre negativo, ovvero lo spazio delle configurazioni non è connesso. Possiamo quindi scrivere la Lagrangiana

$$\mathcal{L} = \frac{MR^2}{4} \dot{\theta}^2 + \frac{m}{2} \|w_{\pm}(\theta)\|^2 \dot{\theta}^2 - \frac{K}{2} (x_{\pm}(\theta)^2 + 4R^2).$$

Ne segue che i punti di equilibrio sono dati da $V'(\theta) = Kx_{\pm}(\theta)w_{\pm}(\theta) = 0$, cioè $w_{\pm}(\theta) = 0$. Questo è possibile solo se $\sin \theta = 0$. Abbiamo quindi quattro punti di equilibrio: $\theta \in \{0, \pi\}$ e per ogni valore di θ abbiamo un equilibrio per x positivo e uno per x negativo. Se $\theta = 0$ si ha che l'equilibrio è instabile se x è positivo e stabile se x è negativo e viceversa per $\theta = \pi$.

3. Le equazioni di Eulero Lagrange sono

$$\begin{aligned}M\ddot{X} &= x - X \\ \ddot{x} &= X - x\end{aligned}$$

Siano x_M, X_m le soluzioni con le condizioni al contorno date. Dunque

$$\begin{aligned}M\dot{X}(t) &= M + \int_0^t (x(s) - X(s)) ds \\ \dot{x} &= \int_0^t (X(s) - x(s)) ds.\end{aligned}$$

Sia T il primo tempo in cui $\|x - X\| = 2\|x_*\|$, allora, per tutti i tempi $t \leq T$, X_M e x_M hanno la derivata seconda limitata. Me segue che possiamo prendere il limite X_{∞} e ottenere $\ddot{X}_{\infty} = 0$ per tutti i tempi $t \leq T$. Ovvero $X_{\infty}(t) = t$. Mentre

$$\ddot{x}_{\infty} = t - x_{\infty}$$

¹Per vostra informazione si tratta di un caso molto speciale del *teorema del viriale*.

Inoltre, abbiamo che l'energia ha il limite

$$\frac{1}{2}\|\dot{x}_\infty\|^2 + \frac{M}{2} + \frac{1}{2}\|x_\infty - t\|^2 = \frac{M}{2} + \frac{1}{2}\|x_*\|^2.$$

Ne segue che

$$\|x_\infty - t\| \leq \|x_*\|,$$

ovvero $T = \infty$. Ne segue che, ponendo $z = x_\infty - t$ si ha $\ddot{z} = -z$, dunque $z(t) = a \cos t + b \sin t$ e $z(0) = x_*$, $\dot{z}(0) = -1$ da cui segue

$$x_\infty(t) = t + x_* \cos t - \sin t.$$