Fisica Matematica I

Secondo Appello, Sessione Estiva, 24-07-23

Cognome........................ Nome........................

Avete 3:00 ore di tempo. Ogni esercizio vale 10 punti. Solo le **risposte chiaramente giustificate** saranno prese in considerazione. Le parti degli elaborati scritte in maniera **disordinata** o **incomprensibile** saranno **ignorate**.

1. Si considerino i potenziali

$$V_N(x) = \begin{cases} 0 & \text{per } x \leqslant 0 \\ x^N & \text{per } x \in (0,1) \\ 1 & \text{altrimeti.} \end{cases}$$

   Sia $x_N(t)$ il moto di una particella di massa uno che si muove sulla retta con condizione iniziale $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = 1$ e sottoposta al potenziale V_N. Si studi il limite x_N per $N \to \infty$.

2. Una barra di densità uno e lunghezza ℓ ha attaccato, ad una estremità, un punto materiale di massa m. Tale barra è libera di muoversi in un piano verticale. Inoltre è presente una forza il cui potenziale, per un punto materiale di massa μ e posizione η, è $V(\eta) = \frac{k\mu}{2}\|\eta\|^2$. Si scrivano le equazioni del moto, si trovino le configurazioni di equilibrio e si esibisca un moto periodico.

3. Dati i punti $a, b \in \mathbb{R}^d$ si mostri che la retta ha la lunghezza minima tra le curve differenziabili che uniscono tali punti.

Soluzione

1. Sia x_N la soluzione di
$$\ddot{x} = -V_N'(x)$$
con le condizioni inziali specificate. Per la conservazione della energia
$$\frac{1}{2}\dot{x}_N^2 + V_N(x) = \frac{1}{2},$$
si ha che $\dot{x}_N$ è uniformemente limitata. Ne segue (per il teorema di Ascoli) che la successione X_N ha delle sottosuccessione nconvergenti. Una tale sottosuccesione soddisfa, per $x_N(t) \leqslant 2^{-\frac{1}{N}}$,
$$\lim_{j\to\infty} x_{N_j}(t) = \int_0^t \lim_{j\to\infty}(1-2x(s)^{N_j})^{\frac{1}{2}}ds = \int_0^t 1dt = t.$$
D'altro canto, se t_N è il tempo per cui $x_N(t) = 2^{-\frac{1}{N}}$, per $t > t_N$ si ha $\lim_{j\to\infty} t_{N_j} = 1$ e
$$\lim_{j\to\infty} x_{N_j}(t) = \lim_{j\to\infty} 2^{-\frac{1}{N_j}} - \int_{t_{N_j}}^t \lim_{j\to\infty}(1-2x(s)^{N_j})^{\frac{1}{2}}ds = 2-t$$

2. Consideriamo la barra con un estremo in $(0,0)$ e l'altro, quello su cui si trova il punto materiale, in $(0,\ell)$. Allora il centro di massa ha coordinate $(x_c, 0)$ dove
$$x_c = \frac{\int_0^\ell xdx + m\ell}{\ell+m} = \frac{\ell+2m}{2(\ell+m)}\ell.$$
Possiamo quindi calcolare il momento di inerzia rispetto al centro di massa:
$$I = \ell^2\int_0^\ell (x-x_c)^2 + m(\ell-x_c)^2 = \frac{\ell^6+6\ell^5m+15\ell^4m^2+4\ell^3m^3}{12(m+\ell)^3}.$$
Chiamando $\xi = (x,y)$ le coordinate del centro di massa e θ l'angolo della barra con l'orizzontale, Allora un punto a distanza z dal centro di massa ha coordinate $\xi + zv(\theta)$, dove $v(\theta) = (\cos\theta, \sin\theta)$. Possiamo quindi calcolare il potenziale
$$\begin{aligned} V(\xi,\theta) &= \int_{-\frac{\ell+2m}{2(\ell+m)}\ell}^{\frac{\ell^2}{2(\ell+m)}} dz\frac{k}{2}\left(\|\xi\|^2 + 2z\langle\xi, v(\theta)\rangle + z^2\right) + \frac{km}{2}\left(\|\xi\|^2 + \frac{\ell^2\langle\xi,v(\theta)\rangle}{(\ell+m)} + \left[\frac{\ell^2}{2(\ell+m)}\right]^2\right) \\ &= \frac{k(m+\ell)}{2}\|\xi\|^2 + C, \end{aligned}$$
per qualche costante C. La Lagrangiana ha quindi la forma
$$\mathcal{L} = \frac{m+\ell}{2}\dot{\xi}^2 + \frac{I}{2}\dot{\theta}^2 - (m+\ell)y - \frac{k(m+\ell)}{2}\|\xi\|^2.$$
Dunque le equazioni del moto sono
$$\begin{aligned} \ddot{\xi} &= -e_2 - k\xi \\ I\ddot{\theta} &= 0. \end{aligned}$$
Le configurazioni di equilibrio sono quindi $\xi = (0, -\frac{1}{k})$, $\dot{\xi} = (0,0)$, $\dot{\theta} = 0$, per qualunque valore di θ.
Se introduciamo le variabili $\eta = \xi + \frac{1}{k}$, ne segue che
$$\ddot{\eta} = -k\eta.$$
Dunque tutti i moti in ξ sono periodici con frequenza $\omega = \sqrt{k}$. Si ha quindi un moto periodico se e solo se $\theta(t) = \frac{\omega}{2\pi}t + \theta_0 \mod 2\pi$.

3. Si noti che se $x \in \mathcal{C}^1([\alpha, \beta], \mathbb{R}^d)$, $x(\alpha) = a, x(\beta) = b$ e $s : [\alpha, \beta] \to [\alpha' \beta']$ è un diffeormofismo allora, ponendo $z(t) = x(s(t))$ si ha

$$\int_{\alpha'}^{\beta'} \|\dot{z}(\tau)\| d\tau = \int_{\alpha'}^{\beta'} \|\dot{x}(s(\tau)\| |s'(\tau)| d\tau = \int_{\alpha}^{\beta} \|\dot{x}(t)\| dt.$$

Overo, la lunghezza di una curva non dipende dalla parametrizzazione. Possiamo quindi parametrizzare le curve in modo che il dominio sia l'intervallo $[0, 1]$ e $\|\dot{x}(t)\| = \text{const.}$ Abbiamo quindi lo spazio di curve

$$\mathcal{M} = \left\{x \in \mathcal{C}^1([0, 1], \mathbb{R}^d) \;:\; x(0) = a, x(1) = b, \|x(t)\| = \|x(0)\| \;\forall t \in [0, 1]\right\}$$

e la funzione lunghezza $\ell : \mathcal{M} \to \mathbb{R}_+$ definita da

$$\ell(x) = \int_0^1 \|\dot{x}(t)\| dt.$$

Si noti che

$$\ell(x) = \int_0^1 \|\dot{x}(s)\| ds \geqslant \left\| \int_0^1 \dot{x}(s) ds \right\| = \|b - a\|.$$

Poichè la retta $x(t) = a + (b - a)t \in \mathcal{M}$ soddisfa $\ell(x) = \|b - a\|$, ne segue che la retta minimizza la lunghezza e questo conclude la dimostrazione.

Nel caso siate curiosi potreste chiedervi se la retta è l'unica curva con questa proprietà.

Un modo semplice per rispondere è assumere che $x_* \in \mathcal{M}$ minimizzi la distanza, allora per ogni $t_* \in [0, 1]$ abbiamo

$$\|b - a\| = \ell(x_*) = \int_0^{t_*} \|\dot{x}_*(t)\| dt + \int_{t_*}^1 \|\dot{x}_*(t)\| dt \geqslant \|x_*(t_*) - a\| + \|b - x_*(t_*)\| \geqslant \|b - a\|$$

dove, nell'ultima disuguaglianza, abbiamo usato la disuguaglianza triangolare. Questo significa che $\|x_*(t_*) - a\| + \|b - x_*(t_*)\| = \|b - a\|$ e questo è possibile solo se $x_*(t_*) = a + (b - a)s$ per qualche $s \in [0, 1]$. Poichè t_* è arbitrario segue che x_* è una retta e quindi $x_*(t) = a + (b - a)t$.

Un approccio alternativo è di studiare i minimi della funzione ℓ. Questo risulta assai più complicato (il chè mostra che non sempre l'apporoccio diretto è quello più efficiente) per semplificare le cose limitandoci alle curve due volte differenziabili (abbiamo visto nello studio dell' azione che questo non è necessariamente una limitaizone). Cominciamo col notare che per $x \in \mathcal{M}$

$$\ell(x) = \int_0^1 \|\dot{x}(0)\| ds = \|\dot{x}(0)\|.$$

Volgiamo studiare i punti stazionari. A questo scopo occorre capire su quale spazio vettoriale è definito il differenziale.
Data $x \in \mathcal{M} \bigcap \mathcal{C}^2$,consideriamo una curva di curve $x(t)+y(t, s) : [0, 1]\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}^d$, $y(t, 0) \equiv 0$, e chiediamo che $x(\cdot, s) \in \mathcal{M}$ per ogni s allora deve essere

$$\begin{aligned}
&a = x(0) + y(0, s) = a + y(0, s)\\
&b = x(1) + y(1, s) = b + y(1, s)\\
&\|\partial_t x(t) + \partial_t y(t, s)\|^2 = \|\partial_t x(0) + \partial_t y(0, s)\|^2
\end{aligned}$$

da cui segue che

$$\begin{aligned}
&y(0, s) = y(1, s) = 0\\
&\langle \dot{x}(t), \partial_s \partial_t y(t, 0)\rangle = \langle \dot{x}(0), \partial_s \partial_t y(0, 0)\rangle.
\end{aligned}$$

Siamo quindi interessati allo spazio vettoriale formato dalle curve

$$\mathbb{V} = \{y : [0,1] \times \mathbb{R} \ : \ y(0,s) = y(1,s) = 0\,;\, \langle \dot{x}(t), \partial_s \partial_t y(t,0) \rangle = \langle \dot{x}(0), \partial_s \partial_t y(0,0) \rangle\}.$$

È conveniente scrivere $y(t,s) = \lambda(s)\dot{x}(t) + \eta(t,s)$ dove $\langle \dot{x}(t), \eta(t,s) \rangle = 0$. Allora

$$\lambda(s) = \langle \dot{x}(t), \partial_s \partial_t y(t,0) \rangle = \langle \dot{x}(0), \partial_s \partial_t y(0,0) \rangle = \lambda(0).$$

Possiamo quindi calcolare

$$\partial_s \ell(x + y(\cdot, s))|_{s=0} = \int_0^1 \frac{\langle \dot{x}(t), \partial_s \partial_t y(t,0) \rangle}{\|\dot{x}(t)\|} = -\int_0^1 \frac{\langle \ddot{x}(t), \partial_s \eta(t,0) \rangle}{\|\dot{x}(t)\|}$$

che è zero per ogni η solo se $\ddot{x}$ è proporzionale a $\dot{x}$, ma $0 = \frac{d}{dt}\|\dot{x}(t)\|^2 = 2\langle \ddot{x}(t), \dot{x}(t) \rangle$ implica $\ddot{x} \equiv 0$, ovvero $x(t) = a + (b-a)t$.