Fisica Matematica I

Secondo Appello, Sessione Estiva, 11-09-23

Cognome......................... Nome.........................

Avete 3:00 ore di tempo. Ogni esercizio vale 10 punti. Solo le **risposte chiaramente giustificate** saranno prese in considerazione. Le parti degli elaborati scritte in maniera **disordinata** o **incomprensibile** saranno **ignorate**.

1. Si consideri una particlella di massa uno che si muove su di una linea sottoposta al potenziale $V(x) = \frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2}$ e ad una forza di attrito propozionale alla velocità con coefficiente di proporzionalità uguale $\frac{2}{3}$. Data la condizione iniziale $x(0) = -\sqrt{2}$, $\dot{x}(0) = 2$ e detta $x(t)$ la posizione della particella al tempo t, si studi il limite $\lim_{t\to\infty} x(t)$.

2. Due dischi uguali, omogenei, di massa $M = 1$ e raggio $R = 1$ sono vincolati a muoversi senza attrito su un piano orizzontale. I loro centri coincidono con due punti fissi del piano C_1 e C_2, posti a distanza 4 tra di loro. Due punti materiali P_1 e P_2 di massa $m_1 = m_2 = 1$, sono fissati ciascuno sul bordo dei rispettivi dischi. Un terzo punto materiale P_3 di massa $m_3 = 1$ è libero di muoversi nel piano. Tra P_1 e P_2, P_1 e P_3, P_3 e P_2 sono applicate delle molle di costante elastica $k = 1$ e lunghezza a riposo nulla. Si scriva la Lagrangiana del sitema. Si verifichi che la configurazione nella quale P_1, P_2 e P_3 sono fermi, collineari al segmento C_1C_2, con P_1 e P_2 posti alla distanza minima tra di loro e P_3 equidistante da C_1 e C_2, è una posizione di equilibrio stabile del sistema.

3. Dati i punti $a, b \in \mathbb{R}^d$ si mostri che la retta è l'unica curva con lunghezza minima tra le curve differenziabili che uniscono tali punti.

Soluzione

1. Le equazioni del moto sono

$$\ddot{x} = -\frac{2}{3}\dot{x} - V'(x)$$
$$x(0) = -\sqrt{2}$$
$$\dot{x}(0) = 2.$$

Poichè l'energia è una funzione di Lyapunov, i minimi del potenziale sono asintoticamente stabili, dunque il limite carcato può appartenere solo all'insieme $\{-1, 1\}$. Inizialmente il moto è diretto verso destra, possiamo qundi inizialmente scrivere l'energia $E(x)$ come funzione della posizione, con questa convenzione abbiamo

$$2 - E(x) = \frac{2}{3}\int_{-\sqrt{2}}^{x} \sqrt{2(E(y) - V(y))}dy,$$

visto che le condizioni iniziali implicano $E(-\sqrt{2}) = 2$. Ne segue che la particella può superare zero solo se $\int_{-\sqrt{2}}^{0} \sqrt{2(E(y) - V(y))}dy < 3$. Poichè

$$E(y) - V(y) \leqslant 2 + \frac{1}{4} = \frac{9}{4},$$

abbiamo

$$\int_{-\sqrt{2}}^{0} \sqrt{2(E(y) - V(y))}dy < \int_{-\sqrt{2}}^{0} \sqrt{\frac{9}{2}}dy = 3,$$

dunque la particella supera lo zero. Per continuare a seguire il moto occorre stimare dal basso quanta energia viene dissipata. Fino a che $E(x) > 0$ possiamo scrivere

$$E(y) - V(y) > \frac{y^2}{4}(2 - y^2).$$

Ne segue che

$$\int_{-\sqrt{2}}^{0} \sqrt{2(E(y) - V(y))}dy > \frac{1}{\sqrt{2}}\int_{0}^{\sqrt{2}} \sqrt{2 - y^2}\, y\, dy = \frac{1}{2\sqrt{2}}\int_{0}^{2} \sqrt{2 - u}\, du$$
$$= \frac{2}{3}.$$

Poichè il potenziale è simmetrico, ne segue che se la particella supera lo zero, inverte il moto e trona a zero (e quindi l'energia resta sempre positiva) allora l'energia dissipata è almeno $\frac{4}{3}$. Questo non è dirimente visto che l'energia a disposizione è due. Tuttavia la particella per tronare a zero deve avere la prima volta che passa da zero una energia di almento $\frac{8}{9}$ e quindi, con questa informazione possiamo ricalcolare quanta energia ha dissipato andando da $-\sqrt{2}$ a zero:

$$\frac{2}{3}\int_{-\sqrt{2}}^{0} \sqrt{2(E(y) - V(y))} \geqslant \frac{2}{3}\int_{-\sqrt{2}}^{0} \sqrt{\frac{16}{9}} = \frac{8\sqrt{2}}{9}.$$

Ne segue che se la particella tronasse a zero per la seconda volta dissiperebbe almeno una energia

$$\frac{8\sqrt{2}}{9} + \frac{8}{9} > 2$$

che è quindi impossibile. In conlusione, la particella rimane intrappolata nella seconda buca di potenziale e quindi

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = 1.$$

2. Sia $v(\theta_1)$ la posizione di P_1, dove $v(\theta) = (\cos\theta, \sin\theta)$. Chiamiamo $4e_1 + v(\theta_2)$ la posizione di P_2 e $\xi = (x, y)$ quella di P_3. Allora

$$\begin{aligned}\mathcal{L} =& \frac{1}{2}(I+1)\dot\theta_1^2 + \frac{1}{2}(I+1)\dot\theta_2^2 + \frac{1}{2}\|\dot\xi\|^2 - \frac{1}{2}(\xi - v(\theta_1))^2 \\ &- \frac{1}{2}(\xi - 4e_1 - v(\theta_2))^2 - \frac{1}{2}(4e_1 + v(\theta_2) - v(\theta_1))^2\end{aligned}$$

dove $I = \frac{2\pi}{3}$. I punti di equilibrio sono determinati dalle equazioni

$$\begin{aligned}&\langle \xi - v(\theta_1), n(\theta_1)\rangle + \langle 4e_1 + v(\theta_2) - v(\theta_1), n(\theta_1)\rangle = 0 \\ &\langle \xi - 4e_1 - v(\theta_2), n(\theta_2)\rangle - \langle 4e_1 + v(\theta_2) - v(\theta_1), n(\theta_2)\rangle = 0 \\ &(\xi - v(\theta_1)) + (\xi - 4e_1 - v(\theta_2)) = 0\end{aligned}$$

dove $n(\theta) = (-\sin\theta, \cos\theta)$. Dunque

$$\begin{aligned}&\langle -\xi + 2v(\theta_1) - 4e_1 - v(\theta_2), n(\theta_1)\rangle = 0 \\ &\langle -\xi + 8e_1 + 2v(\theta_2) - v(\theta_1), n(\theta_2)\rangle = 0 \\ &2\xi - v(\theta_1) - v(\theta_2) - 4e_1 = 0\end{aligned} \tag{1}$$

Sostituendo l'ultima nelle prime due si ha

$$\begin{aligned}&\langle v(\theta_2) - v(\theta_1) - 4e_1, n(\theta_1)\rangle = 0 \\ &\langle v(\theta_2) - v(\theta_1) - 4e_1, n(\theta_2)\rangle = 0 \\ &2\xi = v(\theta_1) + v(\theta_2) + 4e_1\end{aligned}$$

poichè $n(\theta_1)$ e $n(\theta_2)$ sono perpendicolari allo stesso vettore deve essere $n(\theta_1) = \pm n(\theta_2)$ e quindi $v(\theta_1) = \pm v(\theta_2)$. Ma allora $\langle e_1, n(\theta_i)\rangle = 0$ ovvero $\theta_i \in \{0, \pi\}$. Abbiamo quindi quattro punti di equilibrio. Quello menzionato nel testo corrisponde a $\theta_1 = 0$, $\theta_2 = \pi$ e $\xi = 2e_1$. Per studiarne la stabilità consideriamo la matrice hessiana. Si ottiene differenziando i membri di sinistra dell (1) e calcolandoli nel punto di equilibrio:

$$H = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 5 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

calcoliamone gli autovalori

$$\begin{aligned}\det(\lambda - H) &= (\lambda - 2)\det\begin{pmatrix} \lambda-5 & -1 & 1 \\ -1 & \lambda-5 & -1 \\ 1 & -1 & \lambda-2 \end{pmatrix} \\ &= (\lambda-2)\det\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \lambda-6 & \lambda-6 & -1 \\ -\lambda^2+3\lambda-9 & \lambda-3 & \lambda-2 \end{pmatrix} \\ &= (\lambda-2)(\lambda-6)\det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -\lambda^2+7\lambda-9 & \lambda-3 \end{pmatrix} \\ &= (\lambda-2)(\lambda-6)(\lambda^2-2\lambda+6) = (\lambda-2)(\lambda-6)(\lambda-3+\sqrt{3})(\lambda-3-\sqrt{3})\end{aligned}$$

Dunque tutti gli autovalori sono positivi e il punto di equilibrio è stabile.

3. Si noti che se $x \in \mathcal{C}^1([\alpha, \beta], \mathbb{R}^d)$, $x(\alpha) = a, x(\beta) = b$ e $s : [\alpha, \beta] \to [\alpha'\beta']$ è un diffeormofismo allora, ponendo $z(t) = x(s(t))$ si ha

$$\int_{\alpha'}^{\beta'} \|\dot{z}(\tau)\| d\tau = \int_{\alpha'}^{\beta'} \|\dot{x}(s(\tau)\||s'(\tau)| d\tau = \int_{\alpha}^{\beta} \|\dot{x}(t)\| dt.$$

Overo, la lunghezza di una curva non dipende dalla parametrizzazione. Possiamo quindi parametrizzare le curve in modo che il dominio sia l'intervallo $[0, 1]$ e $\|\dot{x}(t)\| = \text{const}$. Abbiamo quindi lo spazio di curve

$$\mathcal{M} = \left\{x \in \mathcal{C}^1([0, 1], \mathbb{R}^d) \ : \ x(0) = a, x(1) = b, \|\dot{x}(t)\| = \|\dot{x}(0)\| \ \forall t \in [0, 1]\right\}$$

e la funzione lunghezza $\ell : \mathcal{M} \to \mathbb{R}_+$ definita da

$$\ell(x) = \int_0^1 \|\dot{x}(t)\| dt.$$

Si noti che

$$\ell(x) = \int_0^1 \|\dot{x}(s)\| ds \geqslant \left\| \int_0^1 \dot{x}(s) ds \right\| = \|b - a\|.$$

Poichè la retta $x(t) = a + (b - a)t \in \mathcal{M}$ soddisfa $\ell(x) = \|b - a\|$, ne segue che la retta minimizza la lunghezza e questo conclude la dimostrazione.

Vediamo ora che la retta è l'unica curva con questa proprietà.

Un modo semplice per rispondere è assumere che $x_* \in \mathcal{M}$ minimizzi la distanza, allora per ogni $t_* \in [0, 1]$ abbiamo

$$\|b - a\| = \ell(x_*) = \int_0^{t_*} \|\dot{x}_*(t)\| dt + \int_{t_*}^1 \|\dot{x}_*(t)\| dt \geqslant \|x_*(t_*) - a\| + \|b - x_*(t_*)\| \geqslant \|b - a\|$$

dove, nell'ultima disuguaglianza, abbiamo usato la disuguaglianza triangolare. Questo significa che $\|x_*(t_*) - a\| + \|b - x_*(t_*)\| = \|b - a\|$ e questo è possibile solo se $x_*(t_*) = a + (b - a)s$ per qualche $s \in [0, 1]$. Poichè t_* è arbitrario segue che x_* è una retta e quindi $x_*(t) = a + (b - a)t$.

Un approccio alternativo è di studiare i minimi della funzione ℓ. Questo risulta assai più complicato (il chè mostra che non sempre l'apporoccio diretto è quello più efficiente) per semplificare le cose limitandoci alle curve due volte differenziabili (abbiamo visto nello studio dell'azione che questo non è necessariamente una limitaizone). Cominciamo col notare che per $x \in \mathcal{M}$

$$\ell(x) = \int_0^1 \|\dot{x}(0)\| ds = \|\dot{x}(0)\|.$$

Volgiamo studiare i punti stazionari. A questo scopo occorre capire su quale spazio vettoriale è definito il differenziale.
Data $x \in \mathcal{M} \bigcap \mathcal{C}^2$,consideriamo una curva di curve $x(t)+y(t, s) : [0, 1]\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}^d$, $y(t, 0) \equiv 0$, e chiediamo che $x(\cdot, s) \in \mathcal{M}$ per ogni s allora deve essere

$$\begin{aligned}
&a = x(0) + y(0, s) = a + y(0, s)\\
&b = x(1) + y(1, s) = b + y(1, s)\\
&\|\partial_t x(t) + \partial_t y(t, s)\|^2 = \|\partial_t x(0) + \partial_t y(0, s)\|^2
\end{aligned}$$

da cui segue che

$$\begin{aligned}
&y(0, s) = y(1, s) = 0\\
&\langle \dot{x}(t), \partial_s \partial_t y(t, 0)\rangle = \langle \dot{x}(0), \partial_s \partial_t y(0, 0)\rangle.
\end{aligned}$$

Siamo quindi interessati allo spazio vettoriale formato dalle curve

$$\mathbb{V} = \{y : [0,1] \times \mathbb{R} \ : \ y(0,s) = y(1,s) = 0\,;\, \langle \dot{x}(t), \partial_s \partial_t y(t,0) \rangle = \langle \dot{x}(0), \partial_s \partial_t y(0,0) \rangle \}.$$

È conveniente scrivere $y(t,s) = \lambda(s)\dot{x}(t) + \eta(t,s)$ dove $\langle \dot{x}(t), \eta(t,s) \rangle = 0$. Allora

$$\lambda(s) = \langle \dot{x}(t), \partial_s \partial_t y(t,0) \rangle = \langle \dot{x}(0), \partial_s \partial_t y(0,0) \rangle = \lambda(0).$$

Possiamo quindi calcolare

$$\partial_s \ell(x + y(\cdot, s))|_{s=0} = \int_0^1 \frac{\langle \dot{x}(t), \partial_s \partial_t y(t,0) \rangle}{\|\dot{x}(t)\|} = -\int_0^1 \frac{\langle \ddot{x}(t), \partial_s \eta(t,0) \rangle}{\|\dot{x}(t)\|}$$

che è zero per ogni η solo se $\ddot{x}$ è proporzionale a $\dot{x}$, ma $0 = \frac{d}{dt}\|\dot{x}(t)\|^2 = 2\langle \ddot{x}(t), \dot{x}(t) \rangle$ implica $\ddot{x} \equiv 0$, ovvero $x(t) = a + (b-a)t$.