

Fisica Matematica I

Primo Appello, Sessione Invernale, 22-01-24

Cognome..... Nome.....

Avete 3:00 ore di tempo. Ogni domanda vale 6 punti. Solo le **risposte chiaramente giustificate** saranno prese in considerazione. Le parti degli elaborati scritte in maniera **disordinata** o **incomprensibile** saranno **ignorate**.

1. Si consideri un punto materiale di massa uno su di un piano verticale (i.e. in presenza di forza di gravità) e sottoposto ad una forza di richiamo con potenziale KU , $K \in \mathbb{R}_+$, tale che, dette (x, y) le coordinate sul piano, $U(x, y) = V(\|(x, y)\|)$ con $V \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ che soddisfa $V'(1) = 0$ and $V'' \geq 1$.
 - (a) Si scriva la Lagrangiana $\mathcal{L}_K$ del sistema.
 - (b) Si mostri che se $K > g$ (g essendo la costante gravitazionale) esiste un unico punto di equilibrio stabile.
 - (c) Si scriva la Hamiltoniana H_K del sistema.
2. Si scriva la Lagrangiana in coordinate polari (ρ, θ)
 - (a) Per $K > g$, si calcoli la Lagrangiana di piccole oscillazioni e se ne studino i modi normali.
 - (b) Si studi il limite $K \rightarrow \infty$ delle frequenze e dei modi normali.

Soluzione

1. La Lagrangiana è

$$\mathcal{L}_K = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - gy - KV(\|(x, y)\|).$$

In alternativa si possono usare (ed infatti sono più convenienti) le coordinate polari $(x, y) = \rho(\sin \theta, -\cos \theta)$ dove stiamo contando l'angolo a partire dall'asse delle y negativo.

$$\mathcal{L}_K = \frac{1}{2}\dot{\rho}^2 + \frac{1}{2}\rho^2\dot{\theta}^2 + g\rho \cos \theta - KV(\rho).$$

Le posizioni di equilibrio sono date dai punti critici del potenziale, ovvero

$$\begin{aligned} g\rho \sin \theta &= 0 \\ -g \cos \theta + KV'(\rho) &= 0. \end{aligned}$$

La prima equazione è soddisfatta o per $\rho = 0$ o per $\theta \in \{0, \pi\}$. Nel primo caso si dovrebbe avere $g \cos \theta = KV'(0)$, ma $V'(0) = -\int_0^1 V'' \leq -1$, dunque l'equazione non ha soluzione se $K > g$. D'altro canto se $\theta = \pi$, si ha $V'(\rho) = -K^{-1}g$ che, essendo V' crescente ha una sola soluzione. Detta ρ_+ tale soluzione si ha, dal teorema del valore intermedio, $V''(\xi)(\rho_+ - 1) = -K^{-1}g$. Ovvero $|\rho_+ - 1| \leq CK^{-1}$. Ma allora usando Taylor al secondo ordine segue

$$\rho_+ = 1 - \frac{g}{KV''(1)} + \mathcal{O}(K^{-2}).$$

Analogamente se $\theta = 0$, si ha $V'(\rho) = K^{-1}g$. E, detta ρ_- la soluzione

$$\rho_- = 1 + \frac{g}{KV''(1)} + \mathcal{O}(K^{-2}).$$

Finalmente, la derivata seconda del potenziale è data da

$$\begin{pmatrix} g\rho \cos \theta & g \sin \theta \\ g \sin \theta & KV''(\rho) \end{pmatrix}$$

Dato l'equilibrio (π, ρ_+) , si ha

$$\begin{pmatrix} -g\rho_+ & 0 \\ 0 & KV''(\rho_+) \end{pmatrix}$$

che non corrisponde ad un punto di minimo, mentre è un minimo l'equilibrio $(0, \rho_-)$, poichè

$$\begin{pmatrix} g\rho_- & 0 \\ 0 & KV''(\rho_-) \end{pmatrix}$$

ha due autovalori positivi. L'Hamiltoniana è data da

$$H_K = \frac{1}{2}p_\rho^2 + \frac{1}{2}\rho^{-2}p_\theta^2 - g\rho \cos \theta + KV(\rho).$$

2. Nelle variabili $(\theta, \xi) = (\theta, \rho - \rho_-)$ la Lagrangiana di piccole oscillazioni è data da

$$\mathcal{L}_0 = \frac{1}{2}\dot{\xi}^2 + \frac{1}{2}\rho_-^2\dot{\theta}^2 - \frac{1}{2}g\rho_- \theta^2 - \frac{1}{2}KV''(\rho_-)\xi^2$$

Poichè la Lagrangiana è diagonale i modi normali non dipendono da K . Si noti che la parte in θ corrisponde al moto di un pendolo di lunghezza ρ_- . Le due frequenze normali sono date da $\frac{g}{\rho_-}$ e $KV''(\rho_-)$ per cui il loro limite è g e ∞ .