Fisica Matematica I

Secondo Appello, Sessione Invernale, 27-02-24

Cognome......................... Nome.........................

Avete 3:00 ore di tempo. Ogni esercizio vale 10 punti. Solo le **risposte chiaramente giustificate** saranno prese in considerazione. Le parti degli elaborati scritte in maniera **disordinata** o **incomprensibile** saranno **ignorate**.

1. Si consideri la funzione $g \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}_+)$ tale che $g(x) = 0$ per $x \notin [0, 1]$ e $\int_0^1 g(t)dt = 1$ e si definisca la forza
$$F_\varepsilon(t) = \varepsilon^{-1} g(\varepsilon^{-1} t).$$
Sia x_ε il moto determinato da
$$\begin{aligned} & m\ddot{x}(t) = -\lambda \dot{x}(t) + F_\varepsilon(t) \\ & x(0) = 0;\ \dot{x}(0) = 0. \end{aligned}$$
Si studi $\lim_{\varepsilon \to 0} x_\varepsilon(t)$, $t > 0$.

2. Due particelle puntiformi, rispettivamente di massa M e m, $M > m$, si muovono su di una retta orizzontale in assenza di forze con condizioni iniziali $X(0) = -1$, $\dot{X}(0) = 1$ e $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = 0$, rispettivamente. Se ne descriva il moto tenendo conto che la loro eventuale collisione è elastica (ovvero durante la collisione si conservano sia il momento totale che l'energia totale).

3. Si consideri una molecola biatomica con atomi di massa M, m vincolati a muoversi su di una retta orizzontale. Il potenziale di interazione è $V_\lambda(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{\lambda}{4}x^4$, dove x è la distanza tra gli atomi e $\lambda \geqslant 0$. Entrambi gli atomi sono soggetti ad un potenziale armonico di costante K con centro l'origine, inoltre sull'atomo di massa M agisce una forza esterna costante di intensità E diretta verso sinistra. Sia q_1 la posizione della prima particella e q_2 quella della seconda. Si scriva la Lagrangiana $\mathcal{L}$ del sistema, si mostri che esiste un solo equilibrio $(\bar{q}_1, \bar{q}_2)$ e se ne studi la stabilità.

Soluzione

1. Integrando rispetto al tempo, per $t \leqslant \varepsilon$ abbiamo

$$m\dot{x}_\varepsilon(t) = -\lambda x_\varepsilon(t) + \int_0^t F_\varepsilon(s)ds = -\lambda x_\varepsilon(t) + \int_0^{\varepsilon^{-1}t} g(s)ds.$$

Cerchiamo una soluzione della forma $x_\varepsilon(t) = e^{-\frac{\lambda}{m}t} z_\varepsilon(t)$. Allora

$$\dot{z}_\varepsilon(t) = e^{\frac{\lambda}{m}t} \int_0^{\varepsilon^{-1}t} g(s)ds \geqslant 0. \tag{1}$$

Quindi $x_\varepsilon(t) \geqslant 0$ per $t \in [0, \varepsilon]$.
Per $t \geqslant \varepsilon$ abbiamo[1]

$$m\dot{x}_\varepsilon(t) = -\lambda x_\varepsilon(t) + \int_0^1 F_\varepsilon(s)ds = -\lambda x_\varepsilon(t) + 1.$$

Integrando un'altra volta abbiamo

$$mx_\varepsilon(t) = -\lambda \int_0^t x_\varepsilon(s)ds + t.$$

Dunque per Gronwall

$$x_\varepsilon(t) \leqslant t + \frac{\lambda}{m}\int_0^t e^{\frac{\lambda}{m}(t-s)} s ds = t + \frac{m^2}{\lambda^2}e^{\frac{\lambda}{m}t} - \frac{m^2}{\lambda^2} - \frac{m}{\lambda}t$$

che implica

$$x_\varepsilon(\varepsilon) \leqslant a_\varepsilon$$

con $0 \leqslant a_\varepsilon \leqslant C\varepsilon$, per qualche costante C. Ne segue che per $t \geqslant \varepsilon$ si ha che $y_\varepsilon(t) = x_\varepsilon(t+\varepsilon)$ è soluzione di

$$\begin{aligned} &m\ddot{y}_\varepsilon(t) = -\lambda\dot{y}_\varepsilon(t) \\ &y_\varepsilon(0) = a_\varepsilon;\ \dot{y}_\varepsilon(0) = m^{-1}. \end{aligned}$$

Che, infatti, integrando da

$$\begin{aligned} &m\dot{y}_\varepsilon(t) = -\lambda y_\varepsilon(t) + 1 \\ &y_\varepsilon(0) = a_\varepsilon. \end{aligned}$$

Per la continuità rispetto alle condizioni iniziali segue che esiste $y(t) = \lim_{\varepsilon\to 0} y_\varepsilon(t)$ e che soddisfa

$$\begin{aligned} &m\ddot{y}(t) = -\lambda\dot{y}(t) \\ &y(0) = 0;\ \dot{y}(0) = m^{-1}. \end{aligned}$$

Infine, per la continuità delle soluzioni delle ODE si ha che, per ogni $t > 0$,

$$\lim_{\varepsilon\to 0} x_\varepsilon(t) = \lim_{\varepsilon\to 0} y_\varepsilon(t-\varepsilon) = y(t).$$

[1] Infatti, è più semplice continuare ad usare la (1). Uso una strategia leggermente differente solo per fare vedere un'altra possibilità su come affrontare il problema.

Ovvero abbiamo che la forza agisce istantaneamente (i fisici la chiamano un *forza impulsiva*) ed ha il solo effetto di cambiare la condizione iniziale della velocià. Il moto è quindi lo stesso che si avrebbe se la velocità iniziale fosse stata m^{-1}.
Per altro l'equazione per y si risolve facilmente:

$$y(t) = \frac{m}{\lambda}\left(1 - e^{-\frac{\lambda}{m}t}\right).$$

In alternativa, come già detto, si può continuare con la (1) e scrivere

$$\begin{aligned} x_\varepsilon(t) &= \int_0^t ds e^{\frac{\lambda}{m}(s-t)} \int_0^{\varepsilon^{-1}s} g(\tau)d\tau \\ &= \int_0^\varepsilon ds e^{\frac{\lambda}{m}(s-t)} \int_0^{\varepsilon^{-1}s} g(\tau)d\tau + \int_\varepsilon^t ds e^{\frac{\lambda}{m}(s-t)}. \end{aligned}$$

Si noti che $\left|\int_0^\varepsilon ds e^{\frac{\lambda}{m}(s-t)} \int_0^{\varepsilon^{-1}s} g(\tau)d\tau\right| \leqslant C\varepsilon$, quindi possiamo facilmente calcolare il limite, per $t > 0$,

$$y(t) = \lim_{\varepsilon\to 0} x_\varepsilon(t) = \int_0^t ds e^{\frac{\lambda}{m}(s-t)} = \frac{m}{\lambda}\left(1 - e^{-\frac{\lambda}{m}t}\right).$$

come già sapevamo.

2. La prima particella si muove di moto rettilineo uniforme e collide al tempo uno in zero con la particella ferma. Per un urto generico, usando il $-$ e il $+$ per le quantità prima e dopo la collisione, rispettivamente, le leggi di conservazione sono

$$\begin{aligned} M\dot{X}_+ + m\dot{x}_+ &= M\dot{X}_- + m\dot{x}_- \\ M\dot{X}_+^2 + m\dot{x}_+^2 &= M\dot{X}_-^2 + m\dot{x}_-^2. \end{aligned}$$

Ovvero

$$\begin{aligned} &M(\dot{X}_+ - \dot{X}_-) = m(\dot{x}_- - \dot{x}_+) \\ &M(\dot{X}_+ - \dot{X}_-)(\dot{X}_+ + \dot{X}_-) = m(\dot{x}_- - \dot{x}_+)(\dot{x}_- + \dot{x}_+). \end{aligned}$$

Dunque deve essere $(\dot{X}_+ + \dot{X}_-) = (\dot{x}_- + \dot{x}_+)$. Ponendo $\Delta = \dot{X}_+ - \dot{X}_-$ e $\delta = \dot{x}_+ - \dot{x}_-$ si ha quindi

$$\begin{aligned} &M\Delta = -m\delta \\ &\Delta = \delta + 2(\dot{x}_- - \dot{X}_-). \end{aligned}$$

Ovvero,

$$\begin{aligned} \delta &= \frac{2M}{m+M}(\dot{X}_- - \dot{x}_-) \\ \Delta &= \frac{2m}{m+M}(\dot{x}_- - \dot{X}_-). \end{aligned}$$

Dunque

$$\begin{aligned} \dot{X}_+ &= \frac{M-m}{m+M}\dot{X}_- + \frac{2m}{m+M}\dot{x}_- \\ \dot{x}_+ &= \frac{m-M}{m+M}\dot{x}_- + \frac{2M}{m+M}\dot{X}_-. \end{aligned}$$

Sostituendo le condizioni iniziali si ha che dopo la collisione

$$\begin{aligned}\dot{X}_+ &= \frac{M-m}{m+M} \\ \dot{x}_+ &= \frac{2M}{m+M}.\end{aligned}$$

Si noti che $\dot{X}_+ < \dot{x}_+$ quindi le due particelle non posso più collidere e conseguentemente dalla collisione in poi si muoveranno di moto rettilineo uniforme con velocità $\dot{x}_+$ e $\dot{X}_+$, rispettivamente.

3. La lagrangiana è

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \frac{m}{2}\dot{q}_1^2 + \frac{M}{2}\dot{q}_2^2 - \frac{K}{2}q_1^2 - \frac{K}{2}q_2^2 - \frac{1}{2}(q_1-q_2)^2 - \frac{\lambda}{4}(q_1-q_2)^4 + Eq_2 \\ &= \frac{m}{2}\dot{q}_1^2 + \frac{M}{2}\dot{q}_2^2 - V(q_1,q_2).\end{aligned}$$

La condizione per avere un punto di equilibrio è data dai punti stazionari del potenziale:

$$\begin{aligned}&Kq_1 + q_1 - q_2 + \lambda(q_1-q_2)^3 = 0 \\ &Kq_2 + q_2 - q_1 + \lambda(q_2-q_1)^3 - E = 0.\end{aligned}$$

Sommando le due equazioni si ha $K(q_1+q_2) = E$. Sostituendo tale relazione nella prima equazione otteniamo

$$\lambda\left(2q_1 - \frac{E}{K}\right)^3 + (2+K)q_1 - \frac{E}{K} = 0.$$

Poichè la funzione sulla sinistra è sempre crescente ne segue che ha un solo zero $\bar{q}_1$.

Per la stabilità si noti che $V(0,0) = 0$ e se $q_1^2 + q_2^2 \geqslant L$, allora, per L sufficientemente grande, si ha

$$V(q_1,q_2) \geqslant \frac{K}{8}L.$$

Dunque V deve avere un minimo all'interno della palla di raggio L centrata all'origine. Poichè V ha un solo punto stazionario ne segue che si tratta di un punto di minimo e quindi di un punto di equilibrio stabile.