

ESERCIZI PER CASA. 3

Esercizio 0.1. *Si consideri una particella di massa m che si muove nel piano sotto l'influenza del potenziale $W_\varepsilon(x, y) = V(x, y) + \frac{1}{2}\varepsilon^{-2}y^2$ assumendo che V sia positivo e limitato in $\mathcal{C}^1$. Si consideri una condizione iniziale con energia $E > 0$. Si studi il moto per $\varepsilon \rightarrow 0$.*

Esercizio 0.2. *Nel caso precedente, si descriva il moto di y per ε piccolo ma non nullo.*

Soluzione dell'esercizio (0.1). Siano $x_\varepsilon, y_\varepsilon$ le soluzioni della equazione del moto. Per la conservazione della energia

$$\frac{1}{2}\varepsilon^{-2}y_\varepsilon^2 \leq \frac{m}{2}\dot{x}_\varepsilon^2 + \frac{m}{2}\dot{y}_\varepsilon^2 + V(x_\varepsilon, y_\varepsilon) + \frac{1}{2}\varepsilon^{-2}y_\varepsilon^2 = E.$$

È quindi naturale introdurre la variabile $z_\varepsilon = \varepsilon^{-1}y_\varepsilon$. In queste variabili le equazioni del moto sono

$$(0.1) \quad \begin{aligned} m\ddot{x}_\varepsilon &= -\partial_x V(x_\varepsilon, \varepsilon z_\varepsilon) \\ m\ddot{z}_\varepsilon &= -\partial_y V(x_\varepsilon, \varepsilon z_\varepsilon) - \varepsilon^{-2}z_\varepsilon \end{aligned}$$

La prima equazione mostra che $\ddot{x}_\varepsilon$ è equilimitato in ε , dunque ha una sottosuccessione convergente per Ascoli-Arzelà. Sia x_* il limite di x_{ε_j} , allora

$$m\dot{x}_* = m \lim_{j \rightarrow \infty} \dot{x}_{\varepsilon_j}(t) = x_0 - \lim_{j \rightarrow \infty} \int_0^t \partial_x V(x_\varepsilon(s), \varepsilon z_\varepsilon(s)) ds. = x_0 - \int_0^t \partial_x V(x_*(s), 0) ds$$

Dunque, differenziando

$$m\ddot{x}_* = -\partial_x V(x_*, 0),$$

ovvero, il moto avviene sotto il vincolo $y = 0$.

Soluzione dell'esercizio (0.2). Sia $\xi = (z_\varepsilon, \dot{z}_\varepsilon)$ allora la seconda delle (0.1) si scrive come

$$\dot{\xi} = A\xi + F(x_\varepsilon, \varepsilon z_\varepsilon)$$

where

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ m^{-1}\varepsilon^{-2} & 0 \end{pmatrix}$$

and

$$F(x, z) = (0, -m^{-1}\partial_y V(x, \varepsilon z)).$$

È quindi naturale porre $\xi = e^{At}\eta$ da cui segue

$$\begin{aligned} \dot{\eta} &= e^{-At}F(x_\varepsilon, \varepsilon z_\varepsilon) = \cos(\varepsilon^{-1}t)F(x_\varepsilon, \varepsilon z_\varepsilon) + \sin(\varepsilon^{-1}t)AF(x_\varepsilon, \varepsilon z_\varepsilon) \\ &= \cos(\varepsilon^{-1}t)F(x_\varepsilon, 0) + \sin(\varepsilon^{-1}t)AF(x_\varepsilon, 0) + \mathcal{O}(\varepsilon). \end{aligned}$$

Ovvero la variabile y è soggetta a delle vibrazioni di ampiezza ε e frequenza ε^{-1} .