Fisica Matematica I

Primo Esonero, Venerdì 14-04-23

Cognome........................ Nome.........................

Avete 2:00 ore di tempo. Ogni esercizio vale 15 punti. Solo le **risposte chiaramente giustificate** saranno prese in considerazione. Le parti degli elaborati scritte in maniera **disordinata** o **incomprensibile** saranno **ignorate**.

1. Una particella di massa 1 si muove su di una retta orizzontale. Detta x la sua posizione, sia $x(0) = -1$, $\dot{x}(0) = 1$. Su tale retta c'è poi un'altra particella, di posizione z e massa $m\varepsilon^2$, collegata con una molla di costante elastica 1 e lunghezza a riposo nulla al punto zero. Infine le due particelle interagiscono con un potenziale $\varepsilon^2 V(\varepsilon^{-1}(x - z))$, dove $V \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}_+)$ ha supporto nell'intervallo $[-1, 1]$. Si assuma $z(0) = \dot{z}(0) = 0$.

   Si mostri che, per ε sufficientemente piccolo e m sufficientemente grande, esiste il limite $\lim_{t\to\infty} \dot{x}(t) = v$.

2. Dato il potenziale $V(x) = -x^3 + 3x$ si consideri il moto determinato da

   $$\begin{aligned} &\ddot{x} = -V'(x) - \frac{3}{4}\dot{x} \\ &x(0) = 0;\ \dot{x}(0) = 2\sqrt{2}. \end{aligned}$$

   si dica

   (a) se il moto è limitato;

   (b) per quale intervallo di tempo il moto è ben definito.

Soluzione

1. Le equazioni del moto sono

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= -\varepsilon V'(\varepsilon^{-1}(x-z)) \\ m\varepsilon^2\ddot{z} &= -z + \varepsilon V'(\varepsilon^{-1}(x-z)). \end{aligned}$$

   Ciò implica che x si muove di moto rettilineo per un tempo $1-\varepsilon$, quando comincia ad interagire con z. Dunque, per $t \geqslant 1-\varepsilon$,

$$\dot{x}(t) = 1 - \int_{1-\varepsilon}^{t} \varepsilon V'(\varepsilon^{-1}(x(s)-z(s)))ds$$

   che implica $|\dot{x}(t)-1| \leqslant F\varepsilon(t-1+\varepsilon)$, dove $F = \|V'\|_\infty$.
   D'altro canto, dato t_* tale che $|z(t)| \leqslant \varepsilon$ per tutti i $t \in [1-\varepsilon, t_*]$ si ha

$$|\varepsilon^2 m\ddot{z}| \leqslant (1+F)\varepsilon$$

   ovvero $|z(t)| \leqslant \frac{1+F}{2m\varepsilon}(t-1+\varepsilon)^2$. Questo implica che possiamo scegliere $t_* = 1-\varepsilon+\varepsilon\sqrt{\frac{2m}{1+F}}$. Ma allora

$$x(t_*) \geqslant 1-\varepsilon+\sqrt{\frac{2m}{1+F}}\varepsilon + \mathcal{O}(\varepsilon^3) > 1+2\varepsilon$$

   a patto che $m > \frac{9}{2}(1+F)$ e ε sia abbastanza piccolo. Inoltre

$$|\dot{z}(t_*)| \leqslant \sqrt{\frac{2(1+F)}{m}} < \frac{2}{3}.$$

   Questo significa che x non interagisce più con z e la velocità di z è inferiore a quella di x. Visto che z è ora sottoposto solamente ad una forza attrattiva verso zero ne segue che $\dot{z}$ non può aumentare e quindi le due particelle non interagiranno più nel futuro. Quindi il limite della velocità di x esiste, visto che per $t \geqslant t_*$ la particella x si muove con velocità costante.

2. Per comodità poniamo $\lambda = \frac{3}{4}$. Detta E l'energia, allora

$$\dot{E} = -\lambda\dot{x}^2 = -\lambda\sqrt{2(E-V(x))}\dot{x}, \tag{1}$$

   fino al tempo in cui $\dot{x} = 0$. Integrando si ha (visto che $\dot{x} > 0$ e quindi si può usare la posizione come variable indipendente)

$$E(x) = 4 - \lambda\int_0^x \sqrt{2(E(y)-V(y))}dy.$$

   La particella rimane intrappolata solo se l'energia scende sotto $2 = V(1)$ che è il massimo del potenziale per $x \geqslant 0$. Sia allora $x_* \in [0,1]$, se esiste, il primo punto in cui $E(x) = 2$, altrimenti poniamo $x_* = 1$. Allora

$$E(x_*) = 4 - \lambda\int_0^{x_*} \sqrt{2(E(y)-V(y))}dy.$$

   Vediamo se le stime banali ci dicono qualcosa: prima di tutto $E(x) \leqslant 4$ e $V(x) \geqslant 0$ quindi

$$E(x_*) \geqslant 4 - \frac{4}{3}\int_0^1 \sqrt{8}dy < 2$$

e non possiamo concludere alcunchè. D'altro canto, per definizione $E(x) \geqslant 2$ e $V(x) \leqslant 3x$ e quindi, supponendo $x_* \geqslant \frac{2}{3}$,

$$E(x_*) \leqslant 4 - \frac{4}{3}\int_0^{\min\{\frac{2}{3},x_*\}} \sqrt{2(2-3x)}dy = 4 + \frac{8\sqrt{2}}{27}\left[\left(2-3(\frac{2}{3})\right)^{\frac{3}{2}} - 2^{\frac{3}{2}}\right] \leqslant 4 - \frac{32}{27} > 2$$

e nuovamente non possiamo concludere nulla. Occorre quindi fare delle stime più accurate. Tuttavia dalle stime precedenti sembra più ragionevole aspettarsi che la particella superi il massimo del potenziale. Proviamo quindi a fare una stima dal basso dell'energia più accurata. Per l'energia usiamo la stessa stima di prima, dunque

$$E(x_*) \geqslant 4 - \lambda\int_0^{x_*} \sqrt{8-2V(y)}dy.$$

Cerchiamo invece di fare meglio per il potenziale. Si noti che, per ogni $x \in [0,1]$, $V(x) \geqslant 2x$. Ne segue

$$\begin{aligned} E(x_*) &\geqslant 4 - \lambda\int_0^{x_*} \sqrt{8-4y}dy \geqslant 4 - \lambda\int_0^1 \sqrt{8-4y}dy \\ &= 4 - \frac{4\lambda}{3}\left[2^{\frac{3}{2}} - 1\right] = 5 - 2^{\frac{3}{2}} > 2. \end{aligned}$$

Ne segue che il moto supera il massimo del potenziale e dunque non è limitato.

Per rispondere alla seconda domanda si noti che (1) implica che l'energia cala. Sia $\bar{x}$, se esiste, il primo posto in cui diventa negativa. Allora, per ogni $x \geqslant \bar{x}$,

$$\begin{aligned} E(x) &= -\lambda\int_{\bar{x}}^x \sqrt{2(E(y)-V(y))}dy \geqslant -\lambda\int_{\bar{x}}^x \sqrt{2(y^3-3y)}dy \geqslant -\lambda\int_{\bar{x}}^x \sqrt{2y^3}dy \\ &= -\lambda\sqrt{2}\frac{2}{5}\left[x^{\frac{5}{2}} - \bar{x}^{\frac{5}{2}}\right] \geqslant -\lambda\sqrt{2}\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}. \end{aligned}$$

Ma questo implica che, per x sufficientemente grande,

$$\frac{1}{2}\dot{x}^2 = E(x) - V(x) \geqslant x^3 - 3x - \sqrt{2}\frac{3}{10}x^{\frac{5}{2}} \geqslant \frac{1}{2}x^3.$$

In altre parole

$$\dot{x} \geqslant x^{\frac{3}{2}}$$

che implica, per ogni $t > t_0$, con t_0 sufficientemente grande,

$$t - t_0 \leqslant \int_{t_0}^t x^{-\frac{3}{2}}(s)\dot{x}(s)ds = \int_{x(t_0)}^{x(t)} y^{-\frac{3}{2}}dy = 2x(t_0)^{-\frac{1}{2}} - 2x(t)^{-\frac{1}{2}}.$$

Ovvero,

$$x(t) \geqslant (x(t_0)^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}(t-t_0))^{-2}.$$

Questa disuguaglianza implica che il moto raggiunge l'infinito in un tempo finito e quindi esiste un $t_+ > 0$ tale che la soluzione è definita solo nell'intervallo $(0, t_+)$.